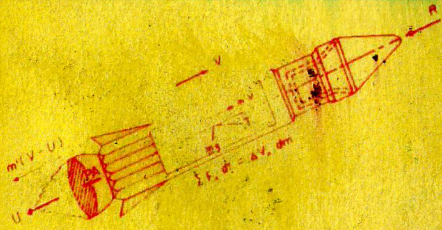
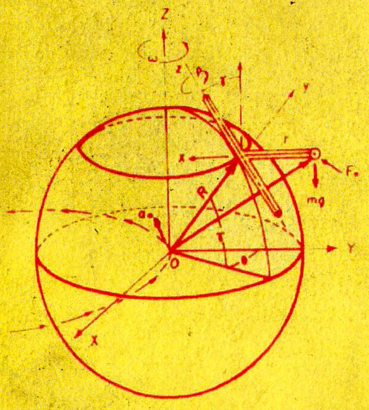
DINAMICA

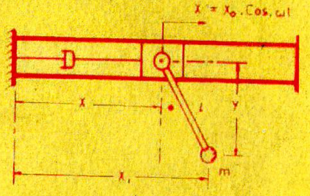
PROBLEMAS RESUELTOS



APLICACION DE:

CINEMATICA Y CINETICA DE PARTICULAS Y CUERPOS SOLIDOS
TRABAJO Y ENERGIA
CANTIDAD DE MOVIMIENTO
MOMENTO CINETICO
MASA VARIABLE
OSCILACIONES
ECUACIONES DE LAGRANGES
PROBLEMAS EXPUESTOS EN EXAMENES





RIGOBERTO LLENQUE LARREA

DINAMICA

CURSO BASICO SUPERIOR

PROBLEMAS RESUELTOS

POR

RIGOBERTO LLENQUE LARREA

LIMA - PERU

A mis padres : Por su sabia luz que me inspiran.

A mis hermanos: Que en la lid me alicientan.

A mis amigos : Cuyo altruismo admiro.

R. Llenque L.

CONTENIDO

A MIS AMIGOS ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERIA

Prefacio

Dentro del conglomerado de cursos que comprenden las Ciencias e Ingeniería, existen algunos que inspiran prioridad precisamente por el rol importante que representan en el estudio de otras asignaturas; o en el ámbito de la profesión misma.

Es el caso de **DINAMICA**, materia que exige del alumno cierto grado de preocupación si se anhela afrontarla con resultados positivos. Dicha preocupación deberá estar dirigida a complementar los conocimientos teóricos, mediante el estudio, análisis y solución de problemas aplicados a la rama en referencia. La experiencia refleja que todo concepto nublado con un ejemplo se aclara, haciendo fácil lo que muchas veces erróneamente suponemos difícil.

Considerando ello y cubriendo así una experiencia, os presento mi obra de: **PROBLEMAS RESUELTOS DE DINAMICA**, como a un solícito amigo que coadyuve en vuestro esfuerzo y dedicación, en la trayectoria hacia el conocimiento imprescindible de esta rama del saber.

He dedicado sumo cuidado en su elaboración y como vos daréis cuenta, amigo lector, algunos problemas contienen su propia teoría; complementando su explicación mediante diagramas e indicaciones vectoriales que facilitan su interpretación. (Ver problemas 72, 150, 206, 466, etc.).

Al término de algunos problemas he agregado bajo el rubro de **OBSERVACIONES IMPORTANTES**, aclaraciones teóricas o conceptos generalizados corolarios de los problemas referidos.

Deseo concluir expresando mi gratitud a mi ex-Profesor de Dinámica Ing. Máximo Gálvez y a mis condiscípulos de clases, puesto que con ellos aprendí a enfocar y discutir problemas de dicha asignatura, lo cual más tarde estimuló mi iniciativa para emprender la obra que os presento.

Enero/1971

El Autor

SIMBOLOS Y UNIDADES USADAS EN LA PRESENTE OBRA

Magnitud.	Símbolo Escalar.	Símbolo Vectorial.	Ecuación Dimensional	Unidades Empleadas
Aceleración Lineal	α, a	$\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{a}$	LT^{-2}	Pies / Seg.^{2}
Aceleración Angular	α · α	$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$	T^{-2}	rad / Seg.^{2}
Aceleración gravitacional	g, g'	$\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$	LT^{-2}	Pies / Seg.^{2}
Velocidad Lineal	V, $\dot{s}$, U	$\mathbf{V}$, $\dot{\mathbf{s}}$, $\mathbf{U}$	LT^{-1}	Pies / Seg.
Velocidad Angular	ω, Ω	$\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$	T^{-1}	rad / Seg.
Desplazamiento lineal	ρ, r, x	$\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{x}$	L	Pies
Desplazamiento angular	θ, $\Delta\theta$	θ $\Delta\theta$	—	Radián
Masa	m, M		M	Lb.Seg^2/Pies
Peso	W, w	$\mathbf{W}$, $\mathbf{w}$	MLT^{-2}	Lb.
Fuerza	F, f	$\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$	MLT^{-2}	Lb.
Frecuencia	f		T^{-1}	Ciclos / Seg.
Densidad	ρ		ML^{-3}	Lb / Pie^3
Cant. de movimiento	G	$\mathbf{G}$	MLT^{-1}	Lb.m/ Seg.
Periodo	$\mathcal{T}$		T	Seg.
Potencia	P		ML^2T^{-3}	HP
Tiempo	t		T	Seg.
Energía cinética	T	$\mathbf{F}\ d\mathbf{r}$	ML^2T^{-2}	Lb. - Pie
Energía potencial	V	$\mathbf{F}\ d\mathbf{r}$	ML^2T^{-2}	Lb. - Pie
Trabajo	T	$\mathbf{F}\ d\mathbf{r}$	ML^2T^{-2}	Lb. - Pie
Energía por fricción	Q	$\mathbf{F}\ d\mathbf{r}$	ML^2T^{-2}	Lb. - Pie
Energía por F. Extêrnas	U	$\mathbf{F}\ d\mathbf{r}$	ML^2T^{-2}	Lb - Pie
Desplazamiento infinitesimal virtual.[Operador]	δ δ			
Operador para derivadas parciales	∂			
Vectores unitarios:				
—Sist. Carteciano		$\mathbf{i}$ $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$		
—Sist. Cilíndrico.		$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$		
—Sist. Esférico		$\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$		
—Sist. Tang. y Normal.		$\mathbf{e}_t$ $\mathbf{e}_n$		

CINEMATICA DE UNA PARTICULA

Estudia el movimiento, prescindiendo de las causas que lo originan.

- Movimiento de una Partícula [Traslación]
- Movimiento de una Línea [Rotación]

Desplazamiento Lineal	Velocidad Instantanea	Aceleración Instantanea	Desplazamiento Angular	Velocidad Angular	Aceleración Angular
$(\mathbf{r})$	$(\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v})$	$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$	$\Delta\theta$	$\dot{\theta} = \omega$	$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$

- Movimiento Absoluto (Respecto a un sistema fijo de coordenadas)
  - Rectilíneo
    - Coordenadas Unidireccionales.
  - Curvilíneo Plano.
    - Coordenadas Rectangulares (x,y)
    - Coordenadas Polares (r,θ)
    - Circulares: Si $r =$ constante. (r,θ)
    - Coordenadas Tangencial y Normal (t,n)
  - Curvilíneo Espacial
    - Coordenadas Rectangulares (x,y,z)
    - Coordenadas Cilíndricas (r,θ,z)
    - Coordenadas Esféricas $(r,\theta,\varnothing)$
- Movimiento Relativo (Respecto a un sistema móvil de coordenadas)
  - Entre dos partículas. (Traslación o Rotación)
  - De una partícula respecto a un sistema de coordenadas móviles. (Traslación y Rotación)

DOBLE FINALIDAD DE LA CINEMATICA.

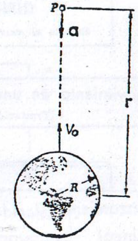
a.— Es considerada como capitulo introductorio a la **Dinámica**, asumiéndosele el estudio geométrico del movimiento.

b.— Como ciencia aplicada constituye el fundamento de la Teoría de los **Mecanismos**.

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

- $\Delta\theta$, ω y α tienen dirección perpendicular al plano de desplazamiento y sentido determinado por la regla de la "Mano derecha"
- El sentido del vector ω es el mismo del vector $\Delta\theta$ no sucediendo asi con α cuyo sentido **no** necesariamente es igual al de ω.
- La velocidad de una partícula sigue la dirección tangente a su trayectoria descrita.

1 —La aceleración de la gravedad de una partícula que cae hacia la Tierra está definida por: $a = -gR^2/r^2$, donde r es la distancia desde el centro de la Tierra a la partícula, R el radio de la Tierra y g la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. Deducir una expresión para la velocidad de escape, o sea la velocidad mínima con que se ha de lanzar una partícula verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre, para que no retorne a la Tierra. Supóngase $v = 0 \longrightarrow r = \infty$



SOLUCION:

Según el enunciado: $$a = -g\frac{R^2}{r^2} \quad \text{..........................} \quad (1)$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación fundamental de la aceleración por dr. se obtiene:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dr}(V) \longrightarrow V.dV = a.dr$$

Sustituyendo la ecuación 1 e integrando:

$$\int V.dV = -gR^2\int\frac{dr}{r^2}$$

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} + C$$

, donde C es un constante de integración cuyo valor se deduce a partir de las condiciones supuestas.

$$(V = 0 \longrightarrow r = \infty)$$

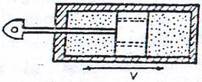
Luego:

$$0 = \frac{2gR^2}{\infty} + C \longrightarrow C = 0$$

Además por condición de velocidad de escape: $\{V = V_o \rightarrow r = R\}$ puesto que está referida a la superficie terrestre.

Por lo tanto: $$V_o^2 = \frac{2gR^2}{R} + 0 \longrightarrow V_o = \sqrt{2gR} \qquad \text{Resp.}$$

2.—El sistema pistón-manivela del mecanismo amortiguador mostrado, se desplaza dentro del cilindro que contiene aceite. Cuando la manivela retrocede con velocidad inicial de 4 pies/Seg. el pistón es obligado a desplazarse forzando al aceite a pasar por pequeños orificios que tiene dicho pistón. Si la desaceleración del pistón es proporcional a su velocidad, determine el desplazamiento de la manivela en función del tiempo.



SOLUCION:

Según el enunciado se afirma: $a = -KV$; de donde se deduce:

$$a = \frac{dV}{dt} = -KV \longrightarrow \frac{dV}{V} = -K.dt$$

Integrando según condiciones iniciales:

$$\int_4^V \frac{dV}{V} = -K\int_0^t dt$$

$$L_n(V-4) = -K(t-0) \longrightarrow V = 4e^{-kt}_{\text{pies/Seg.}} \quad [1]$$

Sustituyendo (1) en la ecuación de la velocidad $V = f(t)$ se obtiene:

$$V = \frac{dr}{dt} = 4e^{-kt} \longrightarrow dr = 4e^{-kt}dt$$

Integrando según condiciones iniciales: $\int_0^r dr = 4\int_0^t e^{-kt}dt$

$$(r-0) = -\frac{4}{K}(e^{-kt} - e^{o})$$

Finalmente: $r = \frac{4}{K}(1 - e^{-kt})$ pies Resp.

3.—Cuando un peso se deja caer sobre una superficie rígida la aceleración de su contenido elástico se puede definir por la relación $a = -K.\text{tg}\ \pi r/2L$, donde L es el espacio que puede comprimirse el material elástico. Siendo Vo la velocidad cuando $r = 0$, determine la velocidad para cualquier instante en función de r.

SOLUCION:

En el problema No. 1 fue demostrada la relación: $V.\ dV = a\ dr$, donde según el enunciado: $a = -K.\ \text{tg.}\ \pi r/2L$. Sustituyendo este valor e integrando entre los límites especificados se deduce:

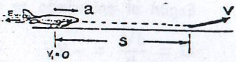
$$\int_{V_o}^V V.\,dV = -K\int_0^r \text{tg.}\ \frac{\pi r}{2L}.dr$$

$$\frac{V^2 - V_o^2}{2} = -K\left(\frac{2L}{\pi}\right)\Big| -L_n\ \text{Cos.}\ \frac{\pi r}{2L}\Big|_0^r$$

$$V^2 - V_o^2 = \frac{4KL}{\pi}\cdot L_n\left(\text{Cos.}\ \frac{\pi r}{2L} - 1\right)$$

Simplificando: $V = \sqrt{V_o^2 + \frac{4KL}{\pi}.\ L_n\ \text{Cos.}\cdot\frac{\pi r}{2L}}$ Resp.

560.—Un reactor aéreo se desplaza sobre la pista de despegue con un empuje que produce una aceleración constante hacia adelante de 10 pies/seg.² Si la velocidad de despegue es 180 millas/Hr. determine la distancia s recorrida en la pista desde el arranque al punto de despegue, y el correspondiente tiempo empleado.



SOLUCION:

$$V = 180\left(\frac{44}{30}\right) = 264 \text{ pies/seg}$$

El tiempo t estará definido por la Ecuación:

$$dV = a.dt \quad \text{..........................} \quad (A)$$

$$\int_0^{264} dV. = 10\int_0^t dt \quad \text{..........................} \quad (I)$$

Integrando entre los límites prescritos en (I) hallamos:

$$t = 26.4 \text{ seg.}$$

Según (A) tenemos:

$$V = V_o + at$$

$$dx = [V_o + at]\,dt$$

Integrando:

$$\int_{x_1}^{x} dx = \int_{t_1}^{t} [V_o + at]\,dt$$

Como parte de reposo:

$$V_o = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$t_1 = 0$$
$$x = s$$

Luego:

$$\int_0^s ds = \int_0^{26.4} [0 + 10t]\,dt$$

Desarrollando el integral:

$$S = \frac{1}{2}[10][26.4]^2$$

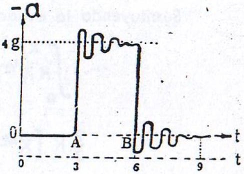
Luego:

$$S = 3{,}484.8 \text{ pies.}$$ Resp.

OBSERVACION:

El factor $\left[\frac{44}{30}\right]$ se usa para transformar millas/Hr. a pies/seg.

4.—Un impulso producido por una fuerza retardadora, actúa durante 3 Seg. sobre una partícula que se mueve hacia adelante con una velocidad de 200 pies/Seg. El registro oscilográfico de la desaceleración se muestra en la figura. Determinar la velocidad de la partícula cuando t = 9 Seg.



SOLUCION:

Observando el gráfico se deduce:
Para el tramo OA. [3 primeros segundos] la aceleración es nula [$a = 0.$] Por lo tanto integrando se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = a = 0 \longrightarrow \int_{200}^{V_A} dV = 0\int_0^3 dt = 0$$

$$V_A - 200 = 0 \longrightarrow V_A = 200 \ \text{pies/seg.}$$

Para el tramo AB: $a = -4g.$ [desaceleración], o sea:

$$\frac{dV}{dt} = a = -4g. \longrightarrow \int_{V_A=200}^{V_B} dV = -4g.\int_3^6 dt$$

$$V_B - 200 = -4g\ (6-3) \longrightarrow V_B = (200 - 12g) \ \text{pies/seg.}$$

Para el tramo de B a 9 Seg. [$a = 0$]:

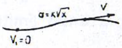
$$\frac{dV}{d} = a = 0 \longrightarrow \int_{V_B}^{V_9} dV = 0\int_6^9 dt$$

$$V_9 - V_B = 0 \longrightarrow V_9 = V_B \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [I]$$

Reemplazando en [I] el valor numérico de V_B:

$$V_9 = \left[200 - 12\ (32.2)\right] \longrightarrow V_9 = -186.4 \ \text{pies/seg.}$$

5.—Determinar en función del tiempo, la aceleración, velocidad y desplazamiento de una partícula que parte del reposo, sabiendo que dicha aceleración es proporcional a la raíz cuadrada del desplazamiento X.



SOLUCION:

Según el enuciado: $a = K\sqrt{X} = KX^{1/2}$ .... (A)

De la ecuación de la aceleración se deduce:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dX}\cdot\frac{dX}{dt} = V\cdot\frac{dV}{dX} \longrightarrow V.dV = a.dX$$

Sustituyendo la ecuación A e integrando:

$$\int_0^X K X^{1/2} . dX = \int_0^V V.dV$$

$$\frac{2}{3} K \left[X^{3/2} - 0\right] = \frac{V^2 - 0}{2} \longrightarrow V = \sqrt{\frac{4K}{3}} \cdot X^{3/4} \quad (B)$$

De la ecuación de la velocidad: $dX = V.dt$

$$\int_0^X X^{-3/4} . dX = \sqrt{\frac{4K}{3}} \int_0^t dt$$

$$4\left[X^{1/4} - 0\right] = \sqrt{\frac{4K}{3}} (t - 0) \longrightarrow X = \frac{K^2 t^4}{144} \quad \text{.......}(C)$$

Sustituyendo la ecuación C en A y B se obtiene:

$$V = \sqrt{\frac{4K}{3}} \left(\frac{K^2 t^4}{144}\right)^{3/4} \longrightarrow V = \frac{K^2 t^3}{36} \quad \text{Resp.}$$

$$a = K\sqrt{\frac{K^2 t^4}{144}} \longrightarrow a = \frac{K^2 t^2}{12} \quad \text{Resp.}$$

562.—Una partícula se mueve sobre el eje X con aceleración constante $x = 4$ pulg./seg.^{2} Determine el desplazamiento Δx de la partícula durante el intervalo de 3 segundos siguiente al instante en que su velocidad es 30 pulg./seg.

SOLUCION:

En el problema 560 se demostró:

$$\int_{x_1}^{x} dx = \int_{t_1}^{t} \left(V_o + at\right) dt$$

Reemplazando límites y valores:

$$\left[x - x_1\right] = \int_0^3 \left(30 + 4t\right) dt$$

Efectuando:

$$\Delta x = 30 \left(3-0\right) + \frac{1}{2} (4)(9)$$

$$\Delta x = 108 \text{ pulg.} \qquad \text{Resp}$$

6.—Un proyectil disparado en un medio resistente con velocidad V_1, sufre una desaceleración igual a cv^n donde c y n son constantes y v la velocidad dentro del medio. Determinar la expresión de la velocidad del proyectil en función del tiempo t que dura la penetración.

SOLUCION:

Según el enunciado se afirma $a = -cV^n$ [Desaceleración]

Pero: $$a = \frac{dV}{dt} \longrightarrow \frac{dV}{V^n} = -c.dt \quad .... (1)$$

Integrando (1) para las condiciones especificadas:

$$\int_{V_1}^{V} V^{-n} dV = -c\int_0^t dt$$

$$\frac{V^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n} = -ct + 0$$

Luego:

$$V^{1-n} = V_1^{1-n} - (1-n)ct$$

$$V = \left[V_1^{1-n} + (n-1)ct \right]^{\frac{1}{1-n}}$$ Resp.

558.—La velocidad de salida de una bala de rifle calibre 30 es 3,000 pies/seg. ¿Qué altura alcanzará la bala disparada verticalmente considerando nula la resistencia del aire y suponiendo la gravedad constante?

SOLUCION:

La altura pedida estará definida por la Ecuación $V.dv = a.ds$

Integrando tenemos: $$\int_{V_1}^{V_2} V\,dv = a\int_{s_1}^{s_2} ds$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2a[s_2 - s_1]$$

Para hmax. tenemos: $V_2 = 0 \quad a = g$

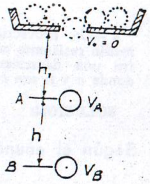
$s_1 = 0 \quad s_2 = h$

Luego:

$$h = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{[3{,}000]^2}{2[32.2]}$$

$$h = 139{,}800 \text{ pies.}$$ Resp.

8.—Un grupo de pequeñas bolas de acero, caen desde el reposo a través de un orificio una tras otra con frecuencia constante n. Desprecie la resistencia del aire y determine la separación vertical h entre 2 bolas cualquiera, en función del tiempo t de la bola que está más arriba.



SOLUCION:

Después de un tiempo t la velocidad V_A de la bola superior estará definida por la ecuación:

$$dV = a\,dt \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Integrando: $\displaystyle\int_{V_o=0}^{V_A} dV = a \int_{t_o=0}^{t} dt$; Donde: $a = g$

$$[V_A - 0] = g\,[t - 0] \longrightarrow V_A = gt \quad \text{..........} \quad (II)$$

Considerando que V_A es la misma velocidad que adquiere la bola B al pasar por el punto A, suponemos que la bola B parte de A con velocidad inicial $V_1 = V_A$. Luego: De la ecuación I :

$$\int_{V_1=V_A}^{V_B} dV = a \int_{t_o=0}^{t_1} dt$$

$$[V_B - V_A] = g\,[t_1 - 0] \longrightarrow V_B = V_A + gt_1 \quad (III)$$

Pero: $V_B = \dfrac{dh}{dt_1}$, y según III : $dh = [V_A + gt_1]\,dt_1$

Integrando: $\displaystyle\int_{o}^{h} dh = \int_{o}^{t_1} [V_A + gt_1]\,dt_1$

Por tanto: $[h - 0] = V_A t_1 + \dfrac{1}{2} g t_1^2$ .... (IV)

Según el enunciado: Frecuencia $f = n \longrightarrow t_1 = \dfrac{1}{n}$ .... (V)

Reemplazando II y V en IV :

$$h = gt\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$h = \frac{g}{n}\left(t + \frac{1}{2n}\right) \qquad \text{Resp.}$$

10.—Luego de suprimirle el combustible a un turboreactor, su rotor desacelera debido a la acción del rozamiento del aire, proporcional al cuadrado de su velocidad angular, y de la fricción constante en los cojinetes. Entonces la desaceleración puede expresarse como: $b - c\omega^2$ donde b y c son constantes y ω es la velocidad angular del rotor. Determinar el tiempo t necesario para que se detenga si el rotor parte del reposo con velocidad angular ω_o

SOLUCION:

Según el enunciado se afirma: $\alpha = -(b + c\omega^2)$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la aceleración angular e integrando se obtiene:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \longrightarrow \int_0^t dt = -\int_{\omega_o}^{\omega} \frac{d\omega}{b + c\omega^2}$$

$$-\int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\omega_o}^{\omega} \frac{\sqrt{c}.d\omega}{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c}.\omega)^2} \quad [\text{ integral directa}$$

$$-\left[t - 0\right] = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc. tg.} \frac{\sqrt{c}.\omega}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc. tg.} \frac{\sqrt{c}.\omega_o}{\sqrt{b}} \right]$$

Además cuando se detiene: $\omega = 0 \longrightarrow \text{arc. tg.} 0 = 0$

Por tanto:
$$t = \frac{1}{\sqrt{cb}} \text{arc. tg.} \left[\omega_o \sqrt{\frac{c}{b}} \right] \qquad \text{Resp.}$$

565.—La velocidad de una partícula que se mueve con movimientos rectilíneo varía linealmente con su desplazamiento, desde 20 pies/seg. a 80 pies/seg. durante un intervalo de 400 pies. Determinar la aceleración de la partícula en el punto medio de dicho intervalo.

SOLUCION:

La aceleración media estará definida por la ecuación: $V.dV = a.ds$

Integrando entre los límites especificados se deduce:

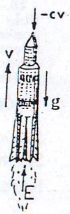
$$\int_{V_1}^{V_2} V.dV = a \int_{S_1}^{S_2} ds \longrightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2a[S_2 - S_1]$$

Luego:
$$a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2[S_2 - S_1]}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$a = \frac{6{,}400 - 400}{2(400 - 0)} \longrightarrow a = 7.5 \text{ pies/Seg}^2. \qquad \text{Resp.}$$

15.—La aceleración vertical de un cohete de combustible sólido se define por: $a = K e^{-bt} - cv - g$. donde K, b y c son constantes, v es la velocidad que adquiere y g la aceleración de la gravedad (constante cuando vuela en la atmósfera). El término exponencial representa el efecto del empuje que disminuye a medida que quema el combustible y, el término $-cv$ el del frenado devido a la resistencia atmosférica. Determinar la expresión de la velocidad vertical del cohete t segundos después del encendido.



SOLUCION:

Por condición del enunciado la ecuación de la aceleración es:

$$a = Ke^{-bt} - CV - g$$

Considerando que: $a = \frac{dv}{dt} = V'$ se obtiene: $\left[\text{ordenando}\right]$

$$V' + CV = \left[Ke^{-bt} - g\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es una ecuación lineal de la forma: $V' + f(t)V = Q(t) \ldots\ldots \quad (2)$

cuya solución conocida es: (3)

$$V = e^{-\int f(t)dt}\left[\int Q(t)e^{\int f(t)\,dt}\,dt + C_1\right]$$

Según (1) y (2): $f(t) = C \rightarrow \int f(t)\,dt = \int c\,dt = ct$

$$Q(t) = \left[Ke^{-bt} - g\right]$$

Reemplazando en (3)

$$V = e^{-ct}\left[\int (Ke^{-bt} - g)\,e^{ct}\,dt + C_1\right]$$

Integrando:

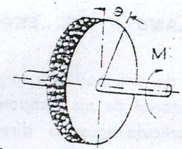
$$V = e^{-ct}\left[\frac{Ke^{(c-b)t}}{c-b} - \frac{ge^{ct}}{c} + C_1\right]$$

$$V = \frac{Ke^{-bt}}{c-b} + C_1e^{-ct} - \frac{g}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cuando $t = 0 \longrightarrow V = 0$, luego: $C_1 = \frac{g}{c} - \frac{K}{c-b} \ldots\ldots (5)$

Reemplazando 5 en 4:

$$V = \frac{K}{c-b}\left(e^{-bt} - e^{-ct}\right) + \frac{g}{c}\left(e^{-ct} - 1\right) \qquad \text{Resp.}$$



16.—Sobre el disco giratorio mostrado se aplica un momento, el cual hace que la aceleración angular α sea incrementada linealmente con el desplazamiento angular θ medido desde el reposo. Para estas condiciones se cumple la relación: $I\alpha = M - K\theta$, donde I es el momento de inercia constante del disco, M el momento fijo de arranque cuando $\theta = 0$, y K una constante. Calcular la ecuación del tiempo t que tarda el disco en girar θ radianes a partir del reposo.

Según el enunciado

$$I\alpha = M + K\theta \longrightarrow \alpha = (M + K\theta)/I \qquad [1]$$

De la ecuación de la aceleración angular se deduce.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \longrightarrow \omega . d\omega = \alpha d\theta \qquad [2]$$

Sustituyendo (1) en (2) e integrando según condiciones iniciales:

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \left(\frac{M + K\theta}{I}\right) d\theta$$

$$\omega^2/2 = \frac{M\theta}{I} + \frac{K\theta^2}{2I} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K\theta^2}{I} + \frac{2M\theta}{I}}$$

Reemplazando ω por su ecuación $d\theta / dt$ e integrando nuevamente según las mismas condiciones iniciales

$$\int_0^t dt = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{K\theta^2}{I} + \frac{2M\theta}{I}}} = \sqrt{\frac{I}{K}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\theta + \frac{M}{K}\right)^2 - \left(\frac{M}{K}\right)^2}}$$

Nota Completando cuadrados en el radical se ha trasformado en integral de solución directa. Por tanto:

$$[t - 0] = \sqrt{\frac{I}{K}} L_n \left[\left(\theta + \frac{M}{K}\right) + \sqrt{\left(\theta + \frac{M}{K}\right)^2 - \left(\frac{M}{K}\right)^2}\right] - \sqrt{\frac{I}{K}} L_n \left[\frac{M}{K} + 0\right]$$

Despejando t

$$t = \sqrt{\frac{I}{K}} L_n \left[\frac{(K\theta + M)/K + \sqrt{\theta^2 + 2M\theta/K}}{M/K}\right]$$

$$t = \sqrt{\frac{I}{K}} L_n \left[1 + \frac{K\theta}{M} + \sqrt{\frac{K\theta}{M}\left(2 + \frac{K\theta}{M}\right)}\right] \qquad \text{Resp}$$

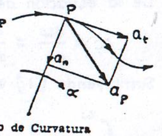
MOVIMIENTO CURVILINEO PLANO Y DEL ESPACIO

Observaciones :

La dirección de la aceleración total de una partícula en movimiento curvilíneo, se define por la suma vectorial de sus componentes

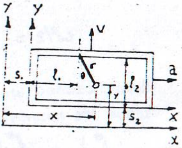
La aceleración tangencial de una partícula sigue la dirección de su velocidad; y el sentido lo determina α (Ver gráfico)

La aceleración normal siempre está dirigida hacia el centro de curvatura.



Movimiento Curvilíneo Plano

27.—Si la armadura X Y tiene aceleración a en la dirección X. y velocidad constante en la dirección y; demostrar que: $-$ g. Sen. $\theta - a. \cos\theta = r\ddot{\theta}$, siendo r (constante) la longitud del péndulo simple y θ su amplitud.



SOLUCION:

Observando el diagrama se deduce :

Posición absoluta de m(x,y)

$$X = s_1 + \ell_1 + r\,\text{Sen.}\theta \quad ; \quad Y = s_2 + \ell_2 - r\,\text{Cos.}\theta$$

Derivando ambas ecuaciones respecto al tiempo : (ℓ y r constantes)

$$\dot{X} = \dot{s}_1 + r\dot{\theta}\,\text{Cos.}\theta \quad ; \quad \dot{Y} = \dot{s}_2 + r\dot{\theta}\,\text{Sen.}\theta$$

$$\ddot{X} = \ddot{s}_1 + r\ddot{\theta}\,\text{Cos.}\theta - r\dot{\theta}^2\text{Sen.}\theta; \quad \ddot{Y} = \ddot{s}_2 + r\ddot{\theta}\,\text{Sen.}\theta + r\dot{\theta}^2\text{Cos.}\theta$$

Por condiciones del problema y del péndulo simple :

$\ddot{X} = 0$ $\qquad\qquad$ $\ddot{Y} = -g$ [Aceleración de la gravedad]

$\ddot{s}_1 = a$ $\qquad\qquad$ $\ddot{s}_2 = 0$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de X e Y :

$$0 = a + r\ddot{\theta}\,\text{Cos.}\theta - r\dot{\theta}^2\,\text{Sen.}\theta \longrightarrow r\dot{\theta}^2\text{Cos.}\theta = (a\,\text{Cos.}\theta + r\ddot{\theta}\,\text{Cos.}^2\theta)/\,\text{Sen.}\theta$$

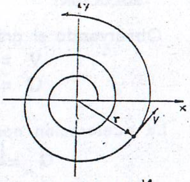
$$-g = r\ddot{\theta}\,\text{Sen.}\theta + r\dot{\theta}^2\,\text{Cos.}\theta \longrightarrow r\dot{\theta}^2\text{Cos.}\theta = -g - r\ddot{\theta}\,\text{Sen.}\theta$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$-g\,\text{Sen}\,\theta - a\,\text{Cos.}\theta = r\ddot{\theta}(\,\text{Sen.}^2\theta + \text{Cos.}^2\theta\,)$$

$$-g\,\text{Sen.}\theta - a\,\text{Cos.}\theta = r\ddot{\theta} \qquad\qquad \text{L.q.q.d.}$$

35.—Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria de la espira logarítmica mostrada. Calcular los módulos de la velocidad y aceleración respectiva en función de b, θ y sus derivadas, sabiendo que $\dot{\theta} = \omega$ es constante.



Espira logarítmica $r = e^{b\theta}$

SOLUCION:

Por condición del problema:

$$r = e^{b\theta} \quad ; \quad \theta = \theta$$

Derivando respecto al tiempo y sustituyendo $\dot{\theta} = \omega$

$$\dot{r} = b\dot{\theta}e^{b\theta} \quad ; \quad \dot{\theta} = \omega \;[\text{constante}]$$

$$\ddot{r} = b^2\dot{\theta}^2 e^{b\theta} \quad ; \quad \ddot{\theta} = 0$$

La ecuación de la velocidad en coordenadas polares se define por: $V = V_r + V_\theta$

Donde: $\begin{cases} V_r = \dot{r} = b\omega e^{b\theta} \\ V_\theta = r\dot{\theta} = \omega e^{b\theta} \end{cases}$

Luego:

$$V = \sqrt{(b\omega e^{b\theta})^2 + (\omega e^{b\theta})^2} \longrightarrow \boxed{V = \omega e^{b\theta}\sqrt{1+b^2}}$$

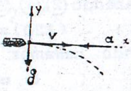
La ecuación de la aceleración en coordenadas polares se define por: $a = a_r + a_\theta$

Donde: $\begin{cases} a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \omega^2 e^{b\theta}(b^2 - 1) \\ a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 2b\omega^2 e^{b\theta} \end{cases}$

$$a = \sqrt{[\omega^2 e^{b\theta}(b^2-1)]^2 + [2\omega b e^{b\theta}]^2}$$

Finalmente: $\longrightarrow a = \omega^2 e^{b\theta}(b^2 + 1)$ Resp.

36.—Una bala de rifle calibre 40 tiene una velocidad de salida de 2.500 pies/seg. En la dirección horizontal tiene una desaceleración de 16 pies/seg.^{2} causada por la resistencia del aire. Determinar el radio de curvatura de la trayectoria de la bala un instante después del disparo.



SOLUCION:

Observando el gráfico se deduce:

$$V = 2{,}500\,i \longleftarrow V = 2{,}500 \text{ pies/Seg.} \quad \text{.................. ①}$$

$$a = -16i - gj = -16i - 32.2j$$

La aceleración normal está relacionada por la ecuación:

$$a_n = \frac{|V \times a|}{V} = \frac{V^2}{\rho} \longrightarrow \rho = \frac{V^3}{|V \times a|} \quad \text{.................. [I]}$$

Siendo $V \times a = (2{,}500i) \times (-16i - 32.2j) = -80.5 \times 10^4 K$

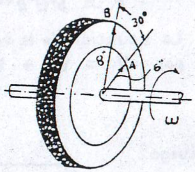
$$|V \times a| = 80.5 \times 10^4 \quad \text{.................. ②}$$

Reemplazando las Ecuaciones 1 y 2 en [I]:

$$\rho = \frac{[2{,}500]^3}{80.5 \times 10^4} \longrightarrow \rho = 19.4 \times 10^4 \text{ pies}$$

Resp.

38.—En un instante dado la aceleración del punto A del volante mostrado es 10 pies/seg2. y la rapidez periférica del punto B decrece a razón de 8 pies/seg. en cada segundo. Calcular para este instante la velocidad angular del volante.



SOLUCION:

Para el punto A se tiene:

$$a_A = a_t + a_n \quad \text{.................. ①}$$

Donde:

$$a_A = 10 \text{ pies/seg.}^2 = 120 \text{ Pulg./Seg2.} \quad \text{.................. ②}$$

$$a_t = r\alpha = 6\alpha \text{ pulg/seg}^2 \quad \text{.................. ③}$$

$$a_n = r\omega^2 = 6\omega^2 \text{ Pulg./Seg2.} \quad \text{.................. ④}$$

En el punto B se tiene:

$$[a_t]_B = R\alpha = 8\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{-8 \times 12}{8} = -12 \text{ rad/seg}^2$$

Se considera la misma velocidad angular para los puntos A y B porque ambos pertenecen al mismo cuerpo rígido.
Luego en [3]:

$$a_t = 6(-12) = -72 \text{ pulg/seg}^2 \quad \text{.................. ⑤}$$

Reemplazando ②,④,⑤; en el módulo de la ecuación I:

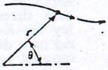
$$(120)^2 = (-72)^2 + (6\omega^2)^2$$

Efectuando hallamos:

$$\omega = 4 \text{ rad./Seg}$$

Resp.

39.—El movimiento de una partícula en el plano vertical de un sistema polar está regido por las coordenadas: $r = 3t^2$ y $\theta = 0.5$ Sen. $\pi t/4$, donde r está expresado en Pulg., θ en rad. y t en Segundos. Determinar la velocidad y la aceleración de dicha partícula 3 Seg. después de iniciado su movimiento.



SOLUCION:

Según el enunciado:

$$r = 3t^2 \qquad \theta = \{0.5 \,.\, \text{Sen.}\ \pi t/4\} \text{ rad}$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{r} = 6t \qquad \dot{\theta} = \frac{\pi}{8} \cdot \text{Cos}\ \pi t/4$$

$$\ddot{r} = 6 \qquad \ddot{\theta} = -\frac{\pi^2}{32} \cdot \text{Sen.}\ \pi t/4$$

Para la condición $t = 3$ Seg. se obtiene:

$$r = 27 \qquad \theta = \sqrt{2}/4$$
$$\dot{r} = 18 \qquad \dot{\theta} = -\pi\sqrt{2}/16$$
$$\ddot{r} = 6 \qquad \ddot{\theta} = -\pi^2\sqrt{2}/64$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de la velocidad y aceleración en coordenadas polares se obtiene:

$$V = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta = 18e_r - 27\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)e_\theta \longrightarrow V = 19.6 \ \text{Pulg./Seg}$$

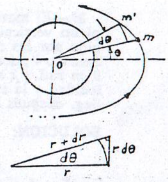
$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta$$

$$a = \left[6 - 27\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)^2\right]e_r + \left[-\frac{27\pi^2\sqrt{2}}{64} - 2(18)\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right]e_\theta$$

Cuyo módulo es:

$$a = 16.4 \ \text{Pulg./Seg2.}$$ Resp.

42.—Un satélite de masa m se mueve en una órbita elíptica en torno a la Tierra. La fuerza sobre el satélite en la dirección transversa es nula por lo que su aceleración en esta dirección es cero. Probar la segunda ley de Kepler para el movimiento planetario que dice: "El radio vector r barre áreas iguales en tiempos iguales". En el gráfico se ilustra el área dA (omm') barrida por el radio vector en un instante dt.



SOLUCION:

Según el enunciado la ley a demostrar puede expresarse matemáticamente como

$$\frac{dA}{dt} = K$$

La aceleración en la dirección transversal se define en coordenadas polares

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Lo que es lo mismo

$$a_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left[r^2\dot{\theta}\right]$$

Integrando considerando que $a_\theta = 0$

$$\frac{1}{r}\int\frac{d}{dt}\left[r^2\dot{\theta}\right] = \int 0$$

$$r^2\dot{\theta} = C \qquad \text{..................................} \quad (I)$$

En el gráfico observamos para un dA aproximadamente se puede considerar

$$dA = \frac{(r+dr)(r\,d\theta)}{2} = \frac{1}{2}r^2 d\theta + \frac{1}{2}r\,d\theta . dr$$

El producto de 2 diferenciales es despreciable, luego:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Dividiendo por dt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad \text{..........................} \quad (II)$$

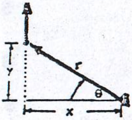
Sustituyendo [I] en la ecuación [II]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

C es constante. Por lo tanto:

$$\frac{dA}{dt} = K \qquad \text{L.q.q.d}$$

43.—Un cohete disparado verticalmente es rastreado por la antena de radar mostrada. Determinar las expresiones de la velocidad y aceleración del cohete, en función de las medidas polares r y θ y sus derivadas respecto al tiempo.



SOLUCION

Según el gráfico la posición del cohete está definida por el vector:

$$r = X\vec{i} + \underbrace{r\,\text{Sen}\,\theta}_{Y}\vec{J} \quad \text{, donde} \quad X = \text{constante}$$

Por lo tanto $\dot{X} = 0$ I

Derivando, considerando I :

$$\dot{r} = 0\,i + [\dot{r}\,\text{Sen}\,\theta + r\dot{\theta}\,\text{Cos}\,\theta]J$$

Considerando que: $\dot{r} = V$ sus módulos serán:

$$\boxed{V = \dot{r}\,\text{Sen}\theta + r\dot{\theta}\,\text{Cos}\,\theta}$$

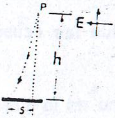
La aceleración del cohete estará definida por: $\frac{dV}{dt}$ o sea:

$$a = \frac{dV}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\,\text{Cos}\,\theta + \ddot{r}\,\text{Sen}\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\text{Cos}\,\theta + r\ddot{\theta}\,\text{Cos}\,\theta - r\dot{\theta}^2\,\text{Sen}\,\theta$$

Simplificando; hallamos la aceleración pedida.

$$a = \dot{r}\dot{\theta}\,[\text{Sen}\theta + \text{Cos}\,\theta] + [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] + r\ddot{\theta}\,\text{Cos}\theta$$

44.—Un objeto que se suelta desde el reposo respecto a la Tierra, en el punto P que está a una altura h por encima de una superficie horizontal, parecerá no caer rectilíneamente hacia abajo devido al movimiento rotatorio de la Tierra. Puede demostrarse que el objeto tiene una aceleración hacia el Este igual a $2V_r \cdot \omega \cdot \text{Cos.}\,\gamma$, donde v_r es la velocidad vertical de caída libre, ω es la velocidad angular de la Tierra y γ es el ángulo de latitud norte. Determinar la expresión de la distancia del pie de la perpendicular que pasa por A, al punto de choque del objeto contra el suelo.



SOLUCION

Por condición del problema se tiene:

$$a_x = \ddot{S} = 2V_y \cdot \omega \cdot \text{Cos}\,\gamma$$

Además la velocidad en caida libre está definida por:

$$V_y = gt$$

Luego : $\ddot{S} = 2g\,\omega t . \text{Cos}\,\gamma$

Integrando respecto al tiempo:

$$\dot{S} = 2g\,\omega.\mathrm{Cos}\,\gamma \int_0^t t.dt = g\omega.\mathrm{Cos}\,\gamma.t^2$$

$$S = g\,\omega.\mathrm{Cos}\,\gamma \int_0^t t^2 dt$$

$$S = \frac{1}{3} g\omega\,.\mathrm{Cos}\,\gamma\, t^3 \quad \text{.........................} \quad \text{(I)}$$

La altura h en caída libre esta definida por:

$$h = V_1 t + \frac{1}{2} gt^2 = 0 + \frac{1}{2} gt^2$$

Luego : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .... (II)

Reemplazando II en I

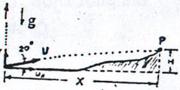
$$S = \frac{1}{3} g\omega.\mathrm{Cos}\gamma \left[\frac{2h}{g}\right] \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Finalmente:

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{3}.\omega\, h \sqrt{\frac{h}{g}}.\mathrm{Cos}\,\gamma$$

Resp

45.—Formando 20º respecto a la horizontal se dispara un proyectil con velocidad inicial de 2,000 pies/Seg., sobre un blanco que dista 4,000 pies sobre la horizontal. Calcular la coordenada H despreciando la resistencia del aire. [Ver figura]



SOLUCION

Según las ecuaciones del movimiento parabólico:

$$U_x = U\ \mathrm{Cos}\ 20° = 2{,}000\ (0.937)$$

$$U_x = 1{,}860\ \text{pies/seg.}$$

Como en la dirección horizontal la aceleración es cero:

$$X_{max} = x = t.U_x$$

Luego :

$$t = \frac{4{,}000}{1{,}890} = 2.32\ \text{seg} \quad \text{.......................} \quad \text{(I)}$$

Según el gráfico el tiempo t es el mismo para las coordenadas x, H del punto P, luego:

$$H = U_Y t - \frac{1}{2} gt^2 \quad \text{.......................} \quad \text{(II)}$$

Además: $U_Y = U\ \text{Sen}.20° = 2{,}000\ (0.34)$

$$U_Y = 680 \text{ pies/seg.} \quad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (III) en (II) :

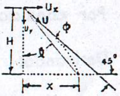
$$H = 680\ (2.32) - \frac{1}{2}(32.2)\ (2.32)^2$$

Finalmente simplificando:

$$H = 1{,}492.8 \text{ pies.}$$

Resp.

46.—Determinar el ángulo ϕ mostrado, tal que al soltarse un proyectil desde el avión que vuela a 5,000 pies de altura con velocidad de 1,320 pies/Seg. inclinado 45º respecto a la horizontal, de en el blanco.



SOLUCION

Usaremos las Ecuaciones del desplazamiento parabólico:

$$X_{max} = U_x.t \text{ ------------------ (I)}$$

$$h_{max} = U_y.t + \frac{1}{2} gt^2 \text{ ------------ (II)}$$

Según (II) el desplazamiento vertical será:

$$5{,}000 = 1{,}320\ \text{Cos}\ 45°t + \frac{1}{2}.gt^2$$

$$16.1\,t^2 + 660\sqrt{2}\,t - 5{,}000 = 0$$

Resolviendo hallamos:

$$t = \frac{159}{32.2} \text{ seg.} \text{ ------------- (III)}$$

Según (I) el desplazamiento horizontal será:

$$X_{max} = 1{,}320\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ t \text{ ------------- (IV)}$$

Como los tiempos son iguales, según (III) y (IV)

$$X_{max} = 4{,}610 \text{ pies}$$

Además en el gráfico:

$$\phi = 45° - \beta \text{ --------------- (V)}$$

Cálculo de β:

$$tg\,\beta = \frac{x}{h} = 0.9227$$

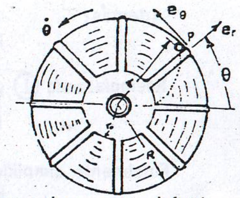
$$\beta = 42°42' \text{ ------------- (VI)}$$

Luego en (V) y (VI)

$$\phi = 2°18'$$

Resp.

47.—La ecuación de la trayectoria descrita por una partícula P de fluido en la bomba centrífuga mostrada, se puede aproximar a: $r = r_o e^{n\theta}$, donde n es una constante sin dimensiones. Si la bomba rota a velocidad constante $\dot\theta = K$; determinar la expresión de la aceleración total de la partícula un instante antes de abandonar la pala radial.



SOLUCION

La aceleración total de P en coordenadas polares está definida por la ecuación:

$$a = [\ddot r - r\dot\theta^2]e_r + [r\ddot\theta - 2\dot r\dot\theta]e_\theta \quad \text{.................} [I]$$

Por condiciones del problema:

$$r = r_o e^{n\theta} \qquad \dot\theta = K = \text{constante} \quad \text{..........} [II]$$

Derivando:

$$\ddot\theta = 0 \quad \text{..........................} [III]$$

$$\dot r = r_o n\,\dot\theta\, e^{n\theta} \quad \text{..........................} [A]$$

$$\ddot r = r_o n^2 \dot\theta^2 e^{n\theta} + r_o n\,\ddot\theta\, e^{n\theta} \quad \text{..........................} [B]$$

Además, multiplicando la ecuación (A) por dt se obtiene:

$$dr = r_o n e^{n\theta} d\theta$$

Integrando entre los límites r_o y R según el enunciado:

$$\int_{r_o}^{R} dr = r_o n \int_0^{\theta} e^{n\theta} d\theta$$

$$[R - r_o] = r_o[e^{n\theta} - 1] \longrightarrow e^{n\theta} = \frac{R}{r_o} \quad \text{..........................} [C]$$

Reemplazando las ecuaciones II III y C en (A) y (B):

$$\dot r = n\,R\,K \quad \text{..........................} [D]$$

$$\ddot r = n^2 R\,K^2 \quad \text{..........................} [E]$$

Sustituyendo las ecuaciones II , III , D y E en el módulo de la ecuación I:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$a = \sqrt{[n^2RK^2 - RK^2]^2 + [0 - 2nRK^2]^2}$$

$$a = \sqrt{R^2K^4(n^4 - 2n^2 + 1) + R^2K^2(4n^2)}$$

$$a = RK^2\sqrt{(n^2+1)^2}$$

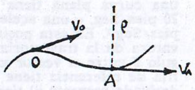
Por lo tanto:

$$a = R\,K^2(n^2 + 1)$$

Resp.

48.—Una partícula que se desplaza a lo largo de la trayectoria curva mostrada, pasa por el punto O con una rapidez de 12 pies/Seg. y va decelerando hasta llegar a 6 pies/

Seg. cuando pasa por el punto A, que está a 18 pies de O medidos sobre la curva. Si dicha desaceleración es proporcional al desplazamiento AO, y la aceleración total de la partícula es 10 pies/Seg.^{2} al pasar por A; determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto A.



SOLUCION

La aceleración total expresada en coordenadas tangencial y normal está definida por :

$$a_A = \ddot{S}\, e_t + \frac{[\dot{S}]^2}{\rho}\, e_n = 10 \text{ pies/seg}^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(I)}$$

Por condición del problema :

$$\widehat{OA} = S = 18 \text{ pies}$$

$$\ddot{S} = a_t = KS = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(II)}$$

Luego se tiene :

$$V.dV = KSds$$

Integrando, considerando los siguientes límites :

Para el punto O : $S = 0 \longrightarrow V = 12$

Para el punto A : $S = 18 \longrightarrow V = 6$

$$\int_{12}^{6} VdV = K \int_{0}^{18} Sds$$

Desarrollando:

$$\frac{36}{2} - \frac{144}{2} = K\left[\frac{18^2}{2}\right]$$

Despejando:

$$K = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en la ecuación (II)

$$\ddot{S} = -\frac{1}{3}(18) = -6 \text{ pies/seg}^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(A)}$$

Además : $\dot{S} = V_A = 6 \text{ pies/seg}^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(B)}$

Reemplazando (A) y (B) en el módulo de la ecuación (I)

$$a_A^2 = [\ddot{S}]^2 + \left[\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right]^2$$

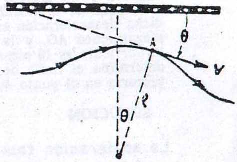
$$100 = 36 + \frac{(36)^2}{\rho^2}$$

Finalmente :

$$\rho = 4.5 \text{ pies}$$

Resp.

49.—Una partícula que se mueve sobre una curva plana tiene una velocidad v de 20 pies/Seg. y una aceleración total α de 100 pies/Seg.^{2}. En esta posición el radio de curvatura de la trayectoria es 80 Pulg. y el ángulo θ entre el vector velocidad y una recta fija de referencia tiene valor en su segunda derivada respecto al tiempo: $\ddot{\theta} = 3$rad./Seg.^{2} Determine la variación en unidad de tiempo del radio de curvatura ρ de la partícula en A.



SOLUCION

Para el instante representado V_A estará expresada por:

$$V_A = \rho\dot{\theta}$$

Para los valores dados:

$$\dot{\theta} = \frac{V_A}{\rho} = \frac{20 \times 12}{80} = 3 \text{ rad/seg.}$$

La aceleración total en coordenadas tangencial y normal está definida por:

$$a = a_t + a_n \quad \text{.............................} \quad (I)$$

Donde :

$$a_t = \frac{d}{dt}\,|\rho\dot{\theta}| = \rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta} \quad \text{..............} \quad (II)$$

$$a_n = \frac{V_A^2}{\rho} \quad \text{.................................} \quad (III)$$

Dando valores especificados en el problema:

En (II) $\quad a_t = \frac{80}{12}(3) + \dot{\rho}(3) = 20 + 3\dot{\rho}$

En (III) $\quad a_n = \frac{(20)^2 \cdot 12}{80} = 60$

Según la ecuación (I) deducimos:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Reemplazando valores:

$$[100]^2 = [20 + 3\dot{\rho}]^2 + [60]^2$$

Simplificando, tendremos la ecuación:

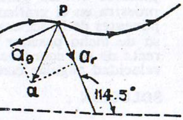
$$3\dot{\rho}^2 + 40\,\dot{\rho} - 2{,}000 = 0$$

Desarrollando esta ecuación:

$$\dot{\rho} = \frac{-40 + 160}{6}$$

Donde $\quad \dot{\rho} = 20 \text{ pies/seg.}$ $\qquad$ Resp.

50.—El vector posición de una partícula P que se desplaza sobre una curva plana está dado por: $\mathbf{r} = 2t\mathbf{e}_r$, donde $\mathbf{e}_r$ es un vector unitario en la dirección radial, t es el tiempo en segundos y r está medido en pulgadas. El desplazamiento angular de r está dado por la ecuación: $\theta = t^2/2$, donde θ está medido en radianes.. Determinar la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ seg. y representar además su posición, en este instante indicando la dirección de la aceleración.



SOLUCION

De acuerdo al enunciado del problema se deduce:

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{e}_r \quad ; \quad \theta = \frac{t^2}{2}$$

Luego :

$$r = 2t$$

Derivando:

$$\dot{r} = 2 \quad ; \quad \dot{\theta} = t$$

$$\ddot{r} = 0 \quad ; \quad \ddot{\theta} = 1$$

Para $t = 2$ Seg. (condición del problema) se obtiene:

$$r = 4 \text{ Pulg.} \quad ; \quad \theta = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ rad.} \quad \text{..........} \quad [A]$$

$$\dot{r} = 2 \text{ Pulg./Seg.} \quad ; \quad \dot{\theta} = 2 \text{ rad./Seg}$$

$$\ddot{r} = 0 \text{ Pulg./Seg2.} \quad ; \quad \ddot{\theta} = 1 \text{ rad./Seg2.}$$

La aceleración en coordenadas polares se define por:

$$a = a_r + a_\theta \quad \text{..........} \quad [I]$$

Donde:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Dando valores numéricos:

$$a_r = 0 - 4(2)^2 = -16 \text{ Pulg./Seg2.}$$

$$a_\theta = 4(1) + 2(2)(2) = 12 \text{ pulg. / Seg.}^2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (I):

$$\mathbf{a} = -16\mathbf{e}_r + 12\mathbf{e}_\theta$$

Donde:

$$a = \sqrt{[16]^2 + [12]^2}$$

$$a = 20 \text{ Pulg./Seg2.} \quad \text{..........} \quad \text{Resp.}$$

Según la ecuación A se afirma:

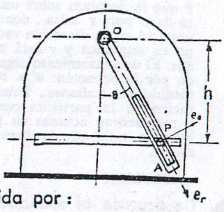
$$\theta = 2 \text{ rad.}$$

Por tanto:

$$\theta = 114.5°$$

Con Ayuda de este ángulo se orienta la aceleración en el gráfico adjunto.

590.—El eslabón OA tiene movimiento rotativo limitado y obliga al pasador P a desplazarse en las guías ranuradas como se muestra en el gráfico. Determinar las componentes de la aceleración radial y transversa de dicho pasador por diferenciación directa de sus coordenadas si el eslabón tiene velocidad angular constante K.



SOLUCION :

La ecuación de la trayectoria estará definida por :

$$h = r \text{ Cos. } \theta = \text{constante.} \quad \text{.........................} \quad [I]$$

Derivando:

$$[II] \qquad 0 = \dot{r} \text{ Cos. } \theta - r\dot{\theta} \text{ Sen. } \theta$$

$$[III] \qquad 0 = \ddot{r} \text{ Cos. } \theta - \dot{r}\dot{\theta} \text{ Sen. } \theta - \dot{r}\dot{\theta} \text{ Sen. } \theta - r\ddot{\theta} \text{ Sen. } \theta - r\dot{\theta}^2 \text{ Cos.}$$

Reemplazando:

$$\dot{\theta} = K = \text{constante}$$
$$\ddot{\theta} = 0$$

En [I] y [II]

$$\dot{r} = r\dot{\theta} \text{ tg. } \theta = \frac{h.K}{\text{Cos. } \theta} \text{ tg. } \theta \quad \text{.........................} \quad [IV]$$

En [III] y [IV]

$$\ddot{r} = \frac{2\dot{r}\dot{\theta} \text{ Sen. } \theta + r\dot{\theta}^2 \text{ Cos. } \theta}{\text{Cos. } \theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{2hK^2 \text{ tg.}^2\theta + hK^2}{\text{Cos. } \theta}$$

Las componentes de la aceleración de la trayectoria están definidas por:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{..} \quad [A]$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \text{..} \quad [B]$$

Reemplazando valores en las ecuaciones A y B:

$$a_r = \frac{2hK^2 \text{ tg.}^2\theta + hK^2}{\text{Cos. } \theta} - \frac{hK^2}{\text{Cos. } \theta}$$

$$a_\theta = 0 + 2K \frac{hK \text{ tg. } \theta}{\text{Cos. } \theta}$$

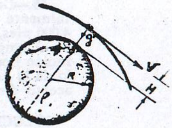
Finalmente se obtiene :

$$a_r = 2hK^2 . \text{ Sec. } \theta \text{ tg.}^2\theta$$

$$a_\theta = 2hK^2 . \text{ Sec. } \theta \text{ tg. } \theta$$

Resp.

52.—Si un satélite artificial terrestre tiene una velocidad de 18,000 millas/hr. en el punto de aproximación máxima (Perigeo) situado a 200 millas sobre la Tierra, determine el radio de curvatura ρ de su trayectoria en el perigeo. El radio de la Tierra mide 3,960 millas y la aceleración absoluta de la gravedad en su superficie es 32.20 pies/Seg.^{2}.



SOLUCION

Tal como se observa en la figura : ρ del perigeo pasa por el eje diametral de la tierra [dirección normal] La ecuación de la aceleración normal a_n sera:

$$a_n = \rho\,\Omega^2 = \rho\left(\frac{V}{\rho}\right)^2 = \frac{V^2}{\rho}$$ donde a_n es la aceleración de la gravedad [g'] en el punto de posición del satélite. Luego :

$$\rho = \frac{V^2}{g'} \qquad \text{①}$$

Cálculo de g'

En la superficie de la tierra según la ecuación del movimiento gravitatorio :

$$F_r = mg = \frac{G\,M\,m}{R^2} \longrightarrow GM = gR^2 \qquad \text{②}$$

Donde : R = radio de la tierra
G = constante gravitacional
g = aceleración de la gravedad en la superficie

A una altura H se tendrá

$$F_r' = m.g' = \frac{G.M.m}{(R+H)^2} \qquad \text{③}$$

Reemplazando ② en ③ $\longrightarrow$ $g' = \dfrac{g\,R^2}{(R+H)^2}$ ④

Reemplazando ④ en ① $\longrightarrow$ $\rho = \dfrac{V^2(R+H)^2}{g\,R^2}$ ⑤

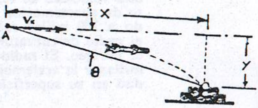
Dando valores numéricos :

$$\rho = \frac{(18{,}000)^2(3{,}960+200)^2}{\left(32.2\,\frac{[3{,}600]^2}{5{,}280}\right)(3{,}960)^2} = \frac{5{,}280(4{,}160)^2}{32.2(4)\,(396)^2}$$

Observemos que g se ha cambiado a millas/h^2.

Finalmente: $\longrightarrow$ $\rho = 4{,}520$ millas Resp.

55.—Una nave aérea que vuela horizontalmente a 600 millas/hr. a una altura de 4,000 pies, suelta un cohete desde el punto A. Si el empuje imprime al cohete una aceleración horizontal de 0.5g. determine el ángulo de la línea de visión al blanco para un acerto directo y la horizontal



SOLUCION

Según el gráfico la distancia horizontal recorrida será:

$$X = 4{,}000 \text{ Cotg.}\theta \qquad (1)$$

Este desplazamiento estará definido por la ecuación:

$$X = V_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y dando valores numéricos:

$$4{,}000 \text{ Cotg.}\theta = 600\left[\frac{44}{30}\right] t + \frac{1}{2}\left[0.5g\right] t^2$$

$$4{,}000 \text{ Cotg.}\theta = 880\ t + \frac{g}{4}\ t^2 \qquad (3)$$

La distancia vertical está regida por la ecuación

$$y = V_y t + \frac{1}{2}\ g t^2$$

Como $V_y = 0$, tendremos:

$$4{,}000 = 0 + \frac{1}{2}\ g t^2$$

Luego

$$t = 20\sqrt{\frac{20}{g}} \qquad (4)$$

Reemplazando la ecuación (4) en (3):

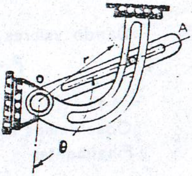
$$4{,}000 \text{ Cotg.}\theta = 8\,00\ (20)\sqrt{\frac{20}{g}} + \frac{g}{4}(20)^2\left(\frac{20}{g}\right)$$

Simplificando considerando que: $g = 32.2$ pies / Seg.^{2}

tenemos $\text{Cotg.}\theta = 3.971$

Luego $\theta = 14°8'$ Resp

56.—El brazo ranurado OA forza a un pequeño pin a moverse en la guía espiral fija definida por: $r = K\theta$. El brazo OA parte del reposo en la posición: $\theta = \pi/4$, y tiene una aceleración angular constante α en sentido antihorario. Determinar la aceleración del pin cuando $\theta = 3\pi/4$.



SOLUCION

La aceleración del pin estará definida por la ecuación en coordenadas polares:

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta \quad \text{(I)}$$

Según el enunciado se tiene: $r = K\theta$

Derivando. $\dot{r} = K\dot{\theta} = K\omega$

$\ddot{r} = K\ddot{\theta} = K\alpha$

Además de la ecuación; $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$; deducimos:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}$$

Integrando cuando θ varía de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{4}$

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \alpha \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta$$

Efectuando:

$$\omega^2 = 2\alpha\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = \pi\alpha = \dot{\theta}^2 \quad \text{(II)}$$

Considerando II reemplazamos valores en la ecuación I:

$$a = \left[K\alpha - \frac{3}{4}K\pi^2\alpha\right]e_r + \left[\frac{3}{4}\pi K\alpha + 2K\pi\alpha\right]e_\theta$$

El módulo de a será:

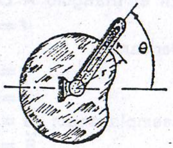
$$a = \sqrt{\left[K\alpha - \frac{3}{4}K\pi^2\alpha\right]^2 + \left[\frac{3}{4}\pi K\alpha + 2K\pi\alpha\right]^2}$$

$$a = \frac{K\alpha}{4}\sqrt{(4 - 3\pi^2)^2 + [11\pi]^2}$$

Desarrollando, finalmente hallamos:

$$a = 10.75\ K\alpha$$ Resp.

57.—La forma de una leva es tal que el centro del rodillo A que sigue su contorno, se mueve sobre una cardioide definida por: $r = b - c.\ Cos\theta$, donde $b > c$. Si la leva no rota, determinar la aceleración de A en términos de θ si el brazo ranurado gira en sentido antihorario con velocidad angular constante ω



SOLUCION

Por condición del problema:

$r = b - c\,Cos\theta$; donde $b > c$ .... (I)

$\alpha = 0 \longrightarrow$ puesto que ω = constante ..... (II)

Derivando (I) :

$\dot{r} = c\dot{\theta}.Sen\theta$ .... (III)

$\ddot{r} = c\dot{\theta}^2 Cos\theta + c\,\ddot{\theta}\,Sen\theta$ .... (IV)

Reemplazando valores en las ecuaciones (III) y (IV)

$$\dot{r} = c\omega \ \mathrm{Sen}\,\theta \quad \text{.......... (A)}$$

$$\ddot{r} = c\omega^2 \ \mathrm{Cos}\,\theta \quad \text{.......... (B)}$$

Las componentes de la aceleración en coordenadas polares es tán definidas por las ecuaciones:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Reemplazando A, B y II deducimos:

$$a_r = c\omega^2 \ \mathrm{Cos}\theta - (b - c\,\mathrm{Cos}\,\theta)\omega^2$$

$$a_\theta = 0 + 2c\omega^2 \mathrm{Sen}\,\theta$$

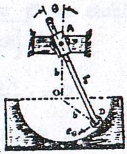
La suma de ambas componentes será:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$a = \sqrt{\omega^4\,[2c\,\mathrm{Cos}\theta - b]^2 + 4c^2\omega^4\,\mathrm{Sen}^2\,\theta}$$

Finalmente simplificando.

$$a = \omega^2\sqrt{4c^2 + b^2 - 4cb\,\mathrm{Cos}\,\theta}$$ Resp.



58.—El brazo AD resbala libremente en el collar en O, el cual pivota también libre en ese punto. Determinar la expresión de la aceleración del centro del rodillo guía A, si el brazo tiene una velocidad angular constante: $\dot{\theta} = K$, en sentido antihorario para un intervalo de su movimiento.

SOLUCION

En el triángulo A O D se deduce:

$$r = 2b.\mathrm{Cos}\,\theta$$

Derivando:

$$\dot{r} = -2b\dot{\theta}.\mathrm{Sen}.\theta$$

$$\ddot{r} = -2b\ddot{\theta}.\mathrm{Sen}.\theta - 2b.\mathrm{Cos}.\theta[\dot{\theta}]^2$$

Reemplazando: $\dot{\theta} = K$ = constante.

$$\ddot{\theta} = 0$$

tenemos:

$$\dot{r} = -2bK.\mathrm{Sen}.\theta$$

$$\ddot{r} = -2bK^2.\mathrm{Cos}.\theta$$

Las componentes de la aceleración para la trayectoria curvilinea está definida por:

$$a_R = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Reemplazando valores

$$a_R = -2bK^2.\cos\theta - 2bK^2.\cos\theta$$

$$a_\theta = -2\left(2bK^2.\,\mathrm{Sen}\,\theta\right)$$

El módulo del vector suma será:

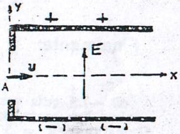
$$a = \sqrt{\left[-4bK^2.\cos\theta\right]^2 + \left[-4bK^2.\,\mathrm{Sen}\,\theta\right]^2}$$

$$a = \sqrt{16b^2.K^4\left[\cos^2\theta + \mathrm{Sen}^2\theta\right]}$$

Finalmente:

$$a = 4bK^2$$ Resp.

59.—En un tiempo: $t = 0$ se emite desde A, un electrón con velocidad U en dirección del eje $\times$ sobre un campo eléctrico: $E = E_o$ Sen.pt, que forma ángulo recto con U. El electrón tiene en la dirección de E una aceleración eE/m, donde e es la carga del electrón y m su masa. Encontrar las coordenadas $\times$ e y del electrón al final del primer ciclo completo de E. La frecuencia $f = p/2\pi$ del campo es constante.



SOLUCION

Considerando el enunciado afirmamos:

$$a_y = E\,\frac{e}{m}\ ;\text{donde}\ \ E = E_o.\mathrm{Sen}.pt \ \ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

Sabemos además que $a_y = \dfrac{dU_y}{dt}$

Luego: $dU_y = E\,\dfrac{e}{m}\cdot dt$

De (I) $dU_y = \dfrac{eE_o}{m}.\,\mathrm{Sen}\ pt,dt$

Integrando desde O a t:

$$\int_o^{U_y} dU_y = \frac{eE_o}{Pm}\int_o^t \mathrm{Sen}\ pt.dpt$$

Desarrollando y reemplazando límites:

$$U_y = -\frac{eE_o}{Pm}\left[\cos.0 - \cos.pt\right] = -\frac{eE_o}{Pm}\left[1 - \cos.pt\right]$$

Sabemos que $U_y = \dfrac{dy}{dt}$, luego según la ecuación anterior:

$$dy = -\frac{eE_o}{Pm}\left[1 - \cos.pt\right]dt$$

Integrando desde O al primer periodo $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{P}$ .... (II)

$$\int_0^y dy = -\frac{eE_o}{Pm}\int_0^T [1 - \cos. pt]dt$$

Desarrollando y reemplazando límites según II

$$y = -\frac{eE_o}{Pm}\left[\frac{2\pi}{P} - \frac{1}{P}(\text{Sen } 2\pi - \text{Sen}.0)\right]$$

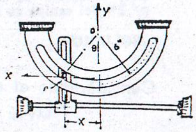
Luego: $y = -\frac{2\pi e E_o}{P^2 m}$ Resp.

Además como la aceleración producida por el campo no tiene componente en la dirección x, afirmamos:

$$x = U\int_0^T dt = U\left[\frac{2\pi}{P} - 0\right]$$

Finalmente: $x = \frac{2\pi U}{P}$ Resp.

60.—La guía vertical mostrada se mueve sobre el brazo horizontal con velocidad constante $\dot{x} = 5$ pies/Seg. antes de cambiar la posición de su movimiento en $x = 5$ Pulg. El pin P se mueve simultáneamente en las guías vertical y circular. Determinar la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la línea OP en el instante cuando $x = 3$ Pulg.



SOLUCION:

El presente problema demuestra una forma usual de relacionar las coordenadas rectangulares con las polares.

Según el gráfico el vector X está definido por:

$$X = r \text{ Sen } \theta \ \mathbf{i}$$

Luego: $X = r \text{ Sen } \theta$

Derivando:

$$\dot{X} = r\dot{\theta} \cos\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\ddot{X} = r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2 \text{Sen}\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Puesto que $\dot{X}$ = constante $\longrightarrow \ddot{X} = 0$

Luego en (II):

$$r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2 \text{Sen}\,\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 \text{tg}\,\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Pero según (I) :

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{X}}{r \cos\theta} = \frac{48}{6.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ rad./seg.}$$

Además en el gráfico :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Reemplazando valores en (III) tenemos :

$$\ddot{\theta} = \left[\frac{16\sqrt{3}}{3}\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Efectuando :

$$\theta = 49.3 \ \frac{\text{rad.}^2}{\text{seg.}}$$ Resp.

61.—Si la guía vertical ranurada mostrada en el problema N°60 tiene una aceleración $\ddot{X} = -4$ pies/seg.^{2}. en $X = 3$ Pulg. y si la velocidad angular de OP es $\dot{\theta} = 2$ rad./Seg. en ese mismo instante, determinar la aceleración angular correspondiente $\ddot{\theta}$ de OP.

SOLUCION

Según el problema anterior :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (I)$$

$$\operatorname{Sec}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (II)$$

$$\ddot{X} = r\,\ddot{\theta}\cos\theta - r\left[\dot{\theta}\right]^2 \operatorname{Sen}\theta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (III)$$

Despejando $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{X}\operatorname{Sec}\theta}{r} + \left[\dot{\theta}\right]^2 \operatorname{tg}\theta$$

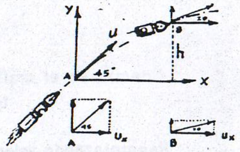
Reemplazando valores:

$$\ddot{\theta} = -\frac{48}{6}\left[\frac{2\sqrt{3}}{9}\right] + 4\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego :

$$\ddot{\theta} = -0.77 \ \frac{\text{rad.}^2}{\text{seg.}}$$ Resp.

62.—La tercera etapa de un cohete se separa de la segunda con una velocidad U de 10,000 millas/hr. en A y vuela balísticamente hasta B, donde la tangente a la trayectoria y la horizontal forman 20º, procediéndose aquí al encendido del cohete motor. La aceleración de la gravedad g se mantiene constante a 30 pies/Seg ². Calcular el tiempo t de A a B y el incremento h de altura.



SOLUCION

Transformando unidades dadas: [Ver conversiones en apéndice]

$$g = 30 \frac{\text{pies}}{\text{seg}^2} = 30 \frac{[3600]^2}{5,280} \frac{\text{millas}}{\text{hora}^2} = 73,295.45 \text{ millas}/\text{hr.}^2$$

El incremento de altura h está contenido en la siguiente ecuación de caída libre:

$$[U_y]_B^2 = [U_y]_A^2 - 2gh \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Además según el gráfico, aplicando ecuaciones del movimiento conocidas tenemos:

$$[U_x]_A = U.\text{Cos } 45° = 5,000\sqrt{2} \text{ milla/hr.} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

En el punto B deducimos:

$$[U_y]_B = [U_x]_B \cdot \text{tg} \cdot 20° \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Considerando que para movimiento parabólico $V_x =$ constante.

$$[U_x]_B = [U_x]_A \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

De acuerdo a IV reemplazamos II en la ecuación III

$$[U_y]_B = 5,000\sqrt{2} \cdot \text{tg} \cdot 20° \text{ milla/hr.} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Según el gráfico:

$$[U_y]_A = U.\text{Sen. } 45° = 5,000\sqrt{2} \text{ milla/hr.} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Reemplazando A y B en la ecuación I

$$h = \frac{5 \times 10^7 [1 - \text{tg}^2 20°]}{2 \times 73,295.45} = \frac{5 \times 0.87 \times 10^7}{146,590.9}$$

Luego:

$$h = 295 \text{ millas.}$$ Resp.

Además: h = f(t) ,esta definida por la ecuación.

$$h = [U_y]_A t - \frac{1}{2} \cdot g t^2$$

Dando valores:

$$295 \times 5,280 = 5,000\sqrt{2}\left[\frac{44}{30}\right] t + \frac{1}{2}(30) t^2$$

Simplificando hallamos:

$$t^2 - 692\, t - 104,000 = 0$$

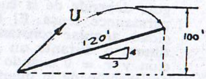
Desarrollando la ecuación deducimos.

$$t = \frac{692 - 252}{2} = 220 \text{ seg.}$$

Luego:

$$t = 3 \text{ min. } 40 \text{ seg.}$$ Resp.

63.—Un pequeño objeto es lanzado hacia arriba como se muestra. Determine el módulo U de su velocidad inicial.



SOLUCION

El vector U está definido por:

$$U = U_x + U_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Para : $= 100 \longrightarrow U'_y = 0$

Luego:

$$U'^2_y - U^2_y = 2\,g\,h$$

$$-U^2_y = 2\,(-32.2)\,100$$

$$U_y = 80.07 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{A}$$

Las coordenadas del punto A serán:

$$X = 120 . \cos\theta = 120\left(\frac{4}{5}\right) = 96 \text{ pies}$$

$$Y = 120 . \operatorname{Sen}\theta = 120\left(\frac{3}{5}\right) = 72 \text{ pies}$$

Este desplazamiento estará definido por las ecuaciones:

$$Y = U_y t + \frac{1}{2} \cdot g.t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

$$X = U_x . t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Reemplazando valores en II :

$$72 = 80.07\,t - \frac{1}{2}\,(32.2)\,t^2$$

$$2.01 . t^2 - 10.008 . t + 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación hallamos:

$t = 3.81$ seg.

El tiempo que tarda y para llegar al punto A es igual al tiempo de X . Considerando ello y según III :

$$U_x = \frac{X}{t} = \frac{96}{3.81} = 25.12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{B}$$

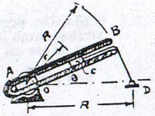
Reemplazando A y B en I :

$$U = \sqrt{[80.07]^2 + [25.12]^2}$$

Finalmente efectuando :

$U = 84.2$ Pies/seg. Resp.

64.—El brazo ranurado AB pivota en O y soporta la muesca C, cuya posición en la guía depende de la cuerda fija en D y que permanece tensa. El brazo AB tiene velocidad angular constante ω en sentido antihorario durante un intervalo de su rotación y r = 0 cuando $\theta = 0°$. Determine la aceleración de la muesca en función de θ.



SOLUCION

La aceleración de C expresada en coordenadas polares está definida por la ecuación:

$$a = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right] e_r + \left[\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right] e_\theta \quad \text{[I]}$$

Donde: $\dot{\theta} = \omega = \text{constante} \longrightarrow \ddot{\theta} = 0$ [II]

Del gráfico se deduce:

$$r = R - \left[R - 2R\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\right] = 2R\,\text{Sen}\frac{\theta}{2} \quad \text{[A]}$$

Derivando y según la afirmación II se obtiene:

$$\dot{r} = R\dot{\theta}\,\text{Cos.}\,\theta/2 = R\,\omega\,.\,\text{Cos.}\,\theta/2 \quad \text{[B]}$$

$$\ddot{r} = -R\dot{\theta}\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{Sen}\,\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}R\omega^2\,\text{Sen}\frac{\theta}{2} \quad \text{[C]}$$

Reemplazando II , B y C en el módulo de la ecuación I se deduce:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

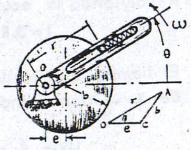
$$a = \sqrt{\left[-\frac{R\omega^2}{2}\text{Sen}\,\frac{\theta}{2} - 2R\omega^2.\text{Sen}\,\frac{\theta}{2}\right]^2 + \left[0 + 2R\omega^2\,\text{Cos}\frac{\theta}{2}\right]^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{4}R^2\omega^4\,\text{Sen}^2\,\theta/2 + 4R^2\omega^4.\ \text{Cos}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$a = \frac{R\omega^2}{2}\sqrt{25\ \text{Sen}^2\frac{\theta}{2} + 16\ \text{Cos.}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$a = R\omega^2\sqrt{4 + \frac{9}{4}\,\text{Sen}^2\,\frac{\theta}{2}} \quad \text{Resp.}$$

65.—El brazo ranurado pivota en O y gira con velocidad angular constante ω en sentido antihorario en torno a la leva fija montada excéntricamente. Hallar la velocidad y la aceleración del pin A en posición $\theta = \pi/2$, cuyo diámetro se desprecia y está siempre en contacto con la leva.



SOLUCION

Por la ley de cosenos del triángulo AOC se deduce:

$$b^2 = r^2 + e^2 + 2er.\ \text{Cos}.\theta \quad \text{[I]}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$0 = 2r\dot{r} + 2e\dot{r}\ .\ \text{Cos}.\theta - 2er\dot{\theta}.\ \text{Sen}.\theta \quad \text{[II]}$$

$$0 = r\ddot{r} + (\dot{r})^2 - e.\dot{r}.\dot{\theta}.\ \text{Sen}.\theta + e.\ddot{r}.\text{Cos}.\theta - e.\dot{r}.\dot{\theta}.\ \text{Sen}.\theta\ .$$
$$- er\dot{\theta}^2.\text{Cos}.\theta - er\ddot{\theta}.\text{Sen}.\theta \quad \text{[III]}$$

Reemplazando los Siguientes valores conocidos:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \dot{\theta} = \omega = \text{constante}$$

$$Sen\ \frac{\pi}{2} = 1 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$Cos\ .\ \frac{\pi}{2} = 0$$

De la ecuación I tenemos:

$$r = \sqrt{b^2 - e^2} \quad \text{.........} \quad \text{(IV)}$$

De la ecuación II hallamos:

$$0 = r\dot{r} + 0 - er\omega$$

$$\dot{r} = e\,\omega \quad \text{.........} \quad \text{(V)}$$

De la ecuación III deducimos:

$$\ddot{r} = \frac{-(\dot{r})^2 + 2\,\dot{r}\dot{\theta}Sen\theta + 0}{r}$$

$$\ddot{r} = \frac{e^2\omega^2}{\sqrt{b^2 - e^2}} \quad \text{.........} \quad \text{(VI)}$$

El módulo de la velocidad en coordenadas polares será:

$$V = \sqrt{[\dot{r}]^2 + [r\,\omega]^2} = \sqrt{e^2\omega^2 + [b^2 - e^2]\omega^2}$$

$$V = b\,\omega$$

El módulo de la aceleración en coordenadas polares es:

$$a = \sqrt{[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]^2 + [r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}]^2}$$

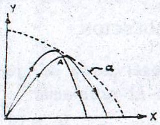
Reemplazando IV , V , VI

$$a = \sqrt{\left[\frac{e^2\omega^2}{\sqrt{b^2 - e^2}} - \sqrt{b^2 - e^2}\,.\,\omega^2\right]^2 + \left[0 - 2e\omega^2\right]^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{4e^4\omega^4 - 4e^2b^2\omega^4 + b^4\omega^4 + 4e^2b^2\omega^4 - 4e^4\omega^4}{b^2 - e^2}}$$

$$a = \frac{b^2\omega^2}{\sqrt{b^2 - e^2}}$$ Resp.

66.—Determine la ecuación de la envolvente a de las trayectorias parabólicas de un proyectil disparado en cualquier ángulo, pero con la misma velocidad inicial. (Se sugiere sustituir $m = tg.\theta$, siendo θ ángulo de tiro que forma con la horizontal. El punto A se aproximará a la envolvente cuando las dos raíces de la ecuación cuadrática tiendan a la igualdad) Despreciar la fricción del aire y suponer g constante.



SOLUCION

La trayectoria de un disparo es parabólica, luego estará regida por las Ecuaciones:

$$y = U \operatorname{Sen}\theta . t - \frac{1}{2} . gt^2 \quad \text{.........................} \quad I$$

$$x = U \operatorname{Cos}\theta . t \quad \text{.........................} \quad II$$

Despejando t de II y reemplazando en I :

$$t = \frac{x}{U . \operatorname{Cos}\theta}$$

$$y = x . tg\theta - \frac{1}{2} g . \frac{x^2 . \operatorname{Sec}^2\theta}{U^2}$$

Sustituyendo: $m = tg.\theta$ tenemos:

$$\left[1 + m^2\right] = \operatorname{Sec}^2\theta$$

$$y = mx - \frac{1}{2} \cdot g \frac{x^2}{U^2}\left[1 + m^2\right] \quad \text{.........................} \quad III$$

Esta ecuación es cuadrática en m y podemos escribirla:

$$f(x,y,m) = y - mx + \frac{1}{2} \cdot g \frac{x^2}{U^2}\left[1 + m^2\right]$$

Derivando respecto a m e igualando a cero por ser la curva contínua:

$$f'(x,y,m) = -x + \frac{gmx^2}{U^2} = 0$$

Luego:

$$m = \frac{U^2}{gx}$$

Reemplazando este valor en III:

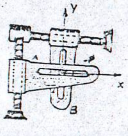
$$y = \frac{xU^2}{gx} - \frac{gx^2}{U^2}\left[1 + \frac{U^4}{g^2x^2}\right]$$

Simplificando:

$$y = \frac{U^2}{2g} - \frac{gx^2}{2U^2}$$

Resp.

67.—El pin P está obligado a moverse en las guías ranuradas que se desplazan perpendicularmente entre sí. En el instante representado A se mueve hacia arriba con V = 16 Pulg./Seg. la cual decrece a razón de 10 Pulg./Seg.^{2}, y B se mueve hacia la derecha con una velocidad de 12 Pulg./Seg. la cual decrece a razón de 5 Pulg./Seg.^{2} Para este instante determine el radio de curvatura de la trayectoria seguida por P.



SOLUCION

Observando la figura y considerando las condiciones mencionadas en el problema:

$$V_A = 16 \ J \ \text{pulg/seg} \quad ; \quad a_A = -10 \ J \ \text{pulg./seg.}^2$$

$$V_B = 12 \ i \ \text{pulg/seg} \quad ; \quad a_B = -5 \ i \ \text{pulg./seg.}^2$$

La suma vectorial de velocidades y aceleraciones en P será:

$$V_P = 12\,i + 16\,J \quad \text{pulg./seg.} \qquad \text{Ⓐ}$$

$$a_P = -5\,i - 10\,J \quad \text{pulg./seg}^2 \qquad \text{Ⓑ}$$

Sabemos además que la aceleración normal está definida por:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{|V \times a|}{|V|}$$

Despejando ρ:

$$\rho = \frac{V^3}{|V \times a|} \qquad \text{Ⓒ}$$

El módulo de la ecuación A es :

$$V_P = V = \sqrt{[12]^2 + [16]^2} = 20 \text{ pulg./seg.}$$

Además según A y B , siendo: $a_P = a$, tenemos:

$$V \times a = [12i + 16J] \times [-5i - 10J] = -40\,K$$

Luego:

$$|V \times a| = 40$$

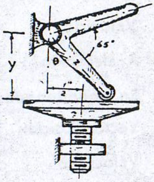
Reemplazando los valores hallados, en la ecuación C :

$$\rho = \frac{[20]^3}{40}$$

Finalmente:

$$\rho = 200 \text{ pulg.}$$ Resp.

68.—Un émbolo vertical A tiene una velocidad de 2 pies/Seg. y una aceleración de 50 pies/Seg.² ambas hacia arriba en el instante $\theta = 30°$. Para esta posición determine la aceleración angular α de OC de la biela de 65°.



SOLUCION

Como el cuerpo es rígido, su velocidad angular es la misma en todos sus puntos, o sea:

$$\alpha_{OC} = \alpha_{OB} = \ddot{\theta} \qquad \text{Ⓘ}$$

Del gráfico deducimos:

$$y = -\left[\frac{2}{12}\right] \cos\theta \text{ pies.}$$

Derivando:

$$\dot{y} = \frac{1}{6}\dot{\theta}\,\text{Sen}\,\theta = V_y \qquad \text{Ⓐ}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{6}\left[\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta}\,\text{Sen}\,\theta\right] = a_y \qquad \text{Ⓑ}$$

Sustituyendo valores numéricos.

En A: $\dot{\theta} = \dfrac{12}{\text{Sen } 30^\circ} = 24$ rad./Seg

En B: $50 = \frac{1}{6}\left[(24)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\right]$

Luego: $\ddot{\theta} = 600 - [24]^2\sqrt{3}$

$\ddot{\theta} = -397$

Finalmente según la ecuación I:

$\alpha_{OC} = 397$ rad./Seg2. [Sentido horario] Resp.

MOVIMIENTO CURVILINEO DE UNA PARTICULA EN EL ESPACIO

Se afirma que una partícula poseé este tipo de movimiento, cuando su trayectoria que describe en el espacio es una línea distinta que la recta.

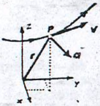
Las ecuaciones empleadas en este capítulo difieren de las tratadas en capítulos anteriores referentes al movimiento plano, en la suma de una componente. Ello se deduce puesto que al orientar el vector posición de una partícula en el espacio tendrá que referirse a un sistema tridimensional. Ejemplo:

a) **En el Sistema Cartesiano:**

Vector Posición : $\mathbf{r} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{J} + Z\,\mathbf{K}$

Velocidad : $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{X}\,\mathbf{i} + \dot{Y}\,\mathbf{J} + \dot{Z}\,\mathbf{K}$

Aceleración : $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{X}\,\mathbf{i} + \ddot{Y}\,\mathbf{J} + \ddot{Z}\,\mathbf{K}$

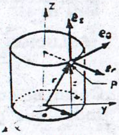


b) **En coordenadas cilindricas :**

Vector Posición : $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_z$

Velocidad : $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{Z}\mathbf{e}_z$

Aceleración : $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{Z}\mathbf{e}_z$



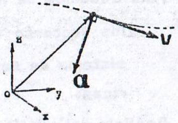
OBSERVACION.—Si r = constante $\longrightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (Ver problema 74).

c) **En coordenadas esféricas:**

Las variaciones del vector posición **R** se analizan detalladamente en los problemas resueltos 72 y 73.

Cabe anotar que es factible pasar **V** y **a** de un sistema a otros por transformación directa, mediante el uso de matrices especiales que se ilustran en el apéndice.

71.—En un cierto instante la velocidad y la aceleración de una partícula están definidas por : V = 2i — 3J + 4k Pulg./Seg. y α = 3i + 6J + 3k Pulg./Seg.^{2} respectivamente. Mostrar que V y α son perpendiculares en este instante.



SOLUCION:

Según datos:

$$V = 2i - 3J + 4K \ \text{Pulg./Seg} \quad \text{-------} \quad (A)$$

$$a = 3i + 6J + 3K \ \text{Pulg./Seg2.} \quad \text{---------} \quad (B)$$

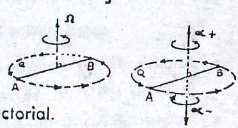
Para demostrar que los vectores (A) y (B) son perpendiculares, afirmamos que su producto escalar es igual a cero; o sea:

$$\text{Si} \quad V \perp a \longrightarrow V.a = 0 \quad \text{.............} \quad (C)$$

Luego:

$$V.a = [2i - 3J + 4K] \cdot [3i + 6J + 3K]$$
$$V.a = 6 - 18 + 12$$
$$V.a = 0$$

Conclusión: $V \perp a$ L.q.q.d.



OBSERVACION IMPORTANTE:

La afirmación (C) se basa en Cálculo vectorial.

Se sabe que: $\mathbf{V}.\mathbf{a} = Va.\ \text{Cos.}\ \theta$ ....(D)

Considerando que **V** y **a** son perpendiculares entre si :

$\theta = 90°$ ⟶ $\text{Cos.}\theta = \text{Cos.}90° = 0$

En consecuencia, según (D) : ⟶ $\boxed{\mathbf{V}.\mathbf{a} = Va(0) = 0}$

La relación (C) se usa frecuentemente en el capítulo correspondiente a movimiento relativo en el espacio, en la solución de problemas en los cuales la velocidad angular y aceleración angular tiene que expresarse en función de sus componentes vectoriales:

$$\boxed{\Omega = \Omega_x i + \Omega_y J + \Omega_z K} \qquad \boxed{\alpha = \alpha_x i + \alpha_y J + \alpha_z K}$$

Al respecto es importante recordar que la **DIRECCION**, tanto del vector velocidad angular Ω como del vector aceleración angular α , es perpendicular al plano de rotación. (Ver gráfico).

Por tanto:

Expresando el vector **AB** (que rota en el plano Q) en función de las coordenadas x,y,z, ⟶ $\boxed{\mathbf{AB} = xi + yJ + zK}$

Se cumplirá: ⟶ $\Omega_{AB} \perp \mathbf{AB}$

$\Omega.\mathbf{AB} = [\Omega_x i + \Omega_y J + \Omega_z K][xi + yJ + zK] = 0$ ⟶ $\Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z = 0$

Similarmente se deduce : ⟶ $\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z = 0$

72.- Dedución de las derivadas de los vectores unitarios de un sistema de coordenadas esféricas:

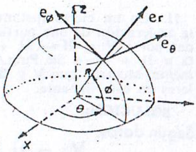


Fig. I

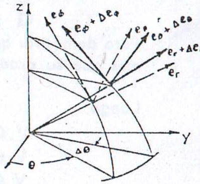
Análisis del gráfico I: (Nomenclatura)

$\theta =$ ángulo horizontal o asinutal.

$\varnothing =$ ángulo de latitud.

e_r , e_θ , $e_\varnothing$ vectores unitarios

R = vector posición de las coordenadas esféricas.



Análisis de las variaciones individuales de las coordenadas esféricas. (Figuras del II al VII):

a) Cuando **R** varía un ΔR se observa: (Figura I)

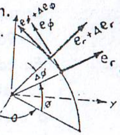
[1] ...... $\Delta e_r = 0$ $\longleftarrow$ e_r no cambia de dirección.

[2] ...... $\Delta e_\theta = 0$ $\longleftarrow$ Puesto que $\theta =$ constante.

[3] ..... $\Delta e_\phi = 0$ $\longleftarrow$ Puesto que $\varnothing =$ constante.

b) Cuando $\varnothing$ varía un $\Delta\ \varnothing$ se observa: (Figura II)

Fig. II



[4] ...... $\Delta e_\theta = 0$ $\longleftarrow$ {RAZON 2}

Por conceptos vectoriales se afirma:

$\Delta e_r \perp e_r$ {La derivada de un vector indica su cambio de dirección}

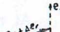
$e_\phi \perp e_r$ {Los vectores unitarios son ortogonales}

Según esta afirmación y la figura III se deduce:

Fig. III

$$\Delta e_r = |\Delta e_r|\, e_\phi$$

Donde observando la misma figura se obtiene:

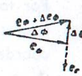


$$|\Delta e_r| \approx |e_r|\,\Delta\,\phi \quad = \Delta\,\phi$$

Luego

[5] .... $\Delta e_r = \Delta\,\phi e_\phi$

Similarmente a los pasos anteriores se deduce:



$$\Delta e_\phi \perp e_\phi$$

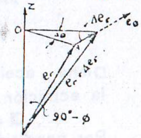
$$e_r \perp e_\phi$$

Se observa además que Δe_ϕ y e_r tienen sentidos opuestos. Por lo tanto:

[6] ...... $\Delta e_\phi = -\ \Delta\phi . e_r$

c) Cuando θ varía un $\Delta\theta$ se observa: (Figura IV)

Fig. IV



Según lo especificado en (a):

$$\Delta e_r \perp e_r$$

$$e_\theta \perp e_r$$

$$\Delta e_r = |\Delta e_r| e_\theta \qquad \text{(Ver figura IV)} \quad (\alpha)$$

Además Δe_r se aproxima a su arco. Por tanto:

$$|\Delta e_r| = [OA]\,\Delta\theta$$

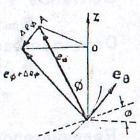
Donde : $(OA) = |e_r|\,\text{Sen.}\,(90° - \phi) = \text{Cos.}\,\phi$

En consecuencia: $\quad |\Delta e_r| = \Delta\theta\,\text{Cos.}\,\phi \quad (\beta)$

Reemplazando β en α se obtiene:

[7] .... $\Delta e_r = \Delta\theta.\text{Cos.}\,\phi\, e_\theta$

Fig. V



Similarmente se deduce: (Ver figura V):

$$\Delta e_\phi \perp e_\phi$$

$$e_\theta \perp e_\phi$$

$$\Delta e_\phi = -|\Delta e_\phi| e_\theta$$

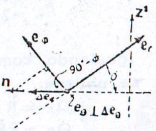
Además: $|\Delta e_\phi| = [AO]\,\Delta\theta$

Donde: $\quad [AO] = |e_r|\,\text{Sen.}\,\phi$

Luego $\quad |\Delta e_\phi| = \Delta\theta\ \text{Sen.}\,\phi$

[8] .... $\Delta e_\phi = -\Delta\theta.\text{Sen.}\,\phi.e_\theta$

Fig VI



De la figura VI se deduce :

$$\Delta e_\theta = |\Delta e_\theta|\, n$$

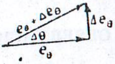
Donde según se observa en la figura VII:

$$|\Delta e_\theta| = |e_\theta|\,\Delta\theta = \Delta\theta$$

$$n = \text{Cos.}\,(90° - \phi)\, e_\phi - \text{Sen.}\,(90° - \phi)\, e_r$$

$$n = \text{Sen.}\,\phi\, e_\phi - \text{Cos.}\,\phi\, e_r$$

Fig. VII



Luego:

[9]....... $\Delta e_\theta = \Delta\theta\,[\text{Sen}\,\phi\, e_\phi - \text{Cos.}\,\phi . e_r]$

d) Cuando θ , ϕ y R varían simultáneamente la posición de cada incremento de vector unitario estará definido lógicamente por la suma vectorial de sus respectivos incrementos parciales deducidos en los pasos (a), (b) y (c) ; o sea:

$$\Delta e_R = \sum \Delta e_r = (1) + (5) + (7) = \Delta\phi\, e_\phi + \Delta\theta\,\text{Cos.}\,\phi\, e_\theta$$

$$\Delta e_\phi = \sum \Delta e_\phi = (3) + (6) + (8) = -\Delta\phi\, e_r - \Delta\theta\,\text{Sen.}\,\phi\, e_\theta$$

$$\Delta e_\theta = \sum \Delta e_\theta = (2) + (4) + (9) = -\Delta\theta\,\text{Cos.}\,\phi\, e_r + \Delta\theta\,\text{Sen.}\,\phi\, e_\phi$$

Dividiendo estas expresiones por Δt, llevándolas luego al límite cuando este tiende a cero ; se obtiene:

$$\dot{e}_R = \dot{\phi}\, e_\phi + \dot{\theta}\,\text{Cos.}\,\phi\, e_\theta$$

$$\dot{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\text{Cos}\,\phi\, e_r + \dot{\theta}\,\text{Sen}\,\phi\, e_\phi$$

$$\dot{e}_\phi = -\dot{\phi}\, e_r - \dot{\theta}\,\text{Sen.}\,\phi\, e_\theta$$

Resp.

[73] Deducción de la ecuación de la aceleración de una partícula en coordenadas esféricas.

Método:

Usaremos el método de diferenciación directa a partir del vector posición $\mathbf{R} = Re_r$.

Dicha aceleración tendrá 3 componentes y estará definida por la ecuación:

$$a = \ddot{R} = a_R + a_\theta + a_\phi \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Por condición del enunciado:

$$R = Re_r \quad \text{.......................} \quad [R \text{ y } e_r \text{: variables}]$$

Derivando y reemplazando: $\dot{e}_r$[Ver repuesta de problema anterior]

$$\dot{R} = \dot{R}e_r + R\dot{e}_r = \dot{R}e_r + R\left[\dot{\phi}e_\phi + \dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi\, e_\theta\right]$$

Derivando por segunda vez R

$$\ddot{R} = \ddot{R}e_r + \dot{R}(\dot{e}_r) + \dot{R}\dot{\phi}e_\phi + R\ddot{\phi}e_\phi + R\dot{\phi}(\dot{e}_\phi) + \dot{R}\dot{\theta}\mathrm{Cos}\phi\, e_\theta$$
$$-R\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Sen}\phi\, e_\theta + R\ddot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi\, e_\theta + R\dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi\,(\dot{e}_\theta)$$

Reemplazando los valores de $\dot{e}_r, \dot{e}_\phi, \dot{e}_\theta$ deducidos en el problema anterior y reuniendo términos semejantes:

$$\ddot{R} = [\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{Cos}^2\phi]\,e_r + [2\dot{R}\dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi + R\ddot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi -$$
$$-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Sen}\phi]\,e_\theta + [2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2\,\mathrm{Sen}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi]\,e_\phi$$

Igualando componentes en ambos miembros según afirmación I se obtiene:

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{Cos}^2\phi$$
$$a_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi + R\ddot{\theta}\,\mathrm{Cos}\,\phi - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Sen}\,\phi$$
$$a_\phi = 2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2 .\ \mathrm{Sen}\,\phi \cdot \mathrm{Cos}\,\phi$$

Resp.

OBSERVACION:

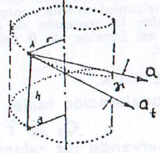
Complementando la teoría vale aclarar que la ecuación [2]: [$\dot{\mathbf{R}}$], representa la velocidad total de la partícula en coordenadas esféricas. Considerada dicha velocidad como la variación respecto al tiempo de R, θ, y Ø quedará expresada por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_\theta + \mathbf{V}_\phi$$

y Según [2]:

$$V_R = \dot{R}$$
$$V_\theta = R.\dot{\theta}.\mathrm{Cos}\varnothing$$
$$V_\phi = R.\dot{\varnothing}$$

74.—Pequeños objetos se sueltan desde el reposo en A y resbalan hacia abajo con fricción despreciable por la espiral cilíndrica cuya hélice constante forma ángulo: $\gamma = \text{arc. tg. } (h/2\pi r)$. La componente de la aceleración medida tangente a la trayectoria es: $g. \text{Sen.} \gamma$. Determine la componente radial de la aceleración, para cada objeto cuando pasa por B después de recorrer una revolución completa.

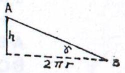


SOLUCION

La aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas está definida por las ecuaciones:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad ; \text{Siendo } \ddot{r} = 0$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad ; \text{Siendo } \dot{r} = 0$$



Luego

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \quad \text{.........................} \quad \text{(I)}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} \quad \text{.........................} \quad \text{(II)}$$

Por condición del problema:

$$a_t = g \,.\, \text{Sen.}\gamma$$

Observando el gráfico se tiene:

$$a_\theta = a_t \,.\, \text{Cos.}\gamma = g.\text{Sen}\,\gamma.\text{Cos.}\gamma.$$

Igualando la última ecuación deducida con II :

$$r\ddot{\theta} = g.\text{Sen}.\gamma.\text{Cos}.\gamma.\left[\frac{2}{2}\right]$$

Luego :

$$\ddot{\theta} = \frac{g.\text{Sen}\,.\,2\gamma}{2r} \quad \text{.........................} \quad \text{(III)}$$

Además

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad \text{.........................} \quad \text{(IV)}$$

Reemplazando III en IV e integrando

$$\int_o \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g.\text{Sen}\,.\,2\gamma}{2r}\int_o^{2\pi} d\theta \qquad 2\pi = \text{una revolución.}$$

Desarrollando :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g\,\text{Sen}\,.\,2\gamma}{2r}\left[2\pi - 0\right]$$

Luego :

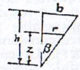
$$\dot{\theta}^2 r = 2\pi\, g \,.\, \text{Sen}.\, 2\gamma \quad \text{.........................} \quad \text{(V)}$$

Reemplazando la ecuación V en I :

$$a_r = -2\pi.g\,\text{Sen}.\,2\gamma$$

Resp.

75.—Una partícula P se desplaza hacia abajo en la trayectoria espiral del cono mostrado. El ángulo γ formado por la tangente a la trayectoria curva y una tangente horizontal en este punto es constante. Determine la expresión de la aceleración radial en función de θ tal que $\dot{\theta}$ = constante.



SOLUCION

La aceleración radial está definida por la ecuación :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \text{(A)}$$

Observando las relaciones geométricas del gráfico deducimos:

$$tg\,\beta = \frac{b}{h} \qquad \text{(I)}$$

$$dZ = BC.\cos\beta \qquad \text{(B)}$$

$$r = Z.tg\,\beta \qquad \text{(II)}$$

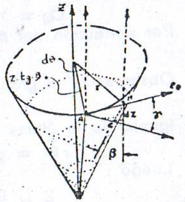
$$AB = r.d\theta = Z.tg\beta.d\theta$$

$$BC = AB.tg\gamma = Z\,tg\,\beta.tg\,\gamma.d\theta \qquad \text{(C)}$$

Reemplazando (C) en (B)

$$dZ = Z.tg\,\beta.tg\gamma d\theta.\cos\beta$$

$$dZ = Z\,Sen\,\beta.tg\gamma d\theta \qquad \text{(D)}$$



Integrando (D), siendo γ y β constantes.

$$\int_z^h \frac{dZ}{Z} = Sen\,\beta.\,tg\gamma\int_0^\theta d\theta$$

$$\left|L\,Z\right|_z^h = Sen\,\beta.tg.\gamma\,[\theta]$$

Reemplazando limites, y cambiando de signo ambos miembros:

$$L\,Z - L\,h = L\frac{Z}{h} = -\theta\,Sen\,\beta.tg\,\gamma$$

Luego:

$$Z = he^{-\theta\,Sen\beta tg\gamma} \qquad \text{(E)}$$

Reemplazando (E) en (II)

$$r = h.tg.\beta.e^{-\theta\,Sen\,\beta.tg\,\gamma}$$

Derivando tenemos:

$$\dot{r} = -h.tg.\beta.Sen\,\beta.tg\,\gamma.\dot{\theta}.e^{-\theta\,Sen\,\beta\,tg\gamma}$$

$$\ddot{r} = h.tg.\beta.Sen^2\beta.tg^2\gamma\dot{\theta}^2e^{-\theta\,Sen\,\beta.tg\gamma}$$

Reemplazando valores en (A) y (I):

$$a_r = b\dot{\theta}^2(tg^2\gamma.Sen^2\beta - 1)\,e^{-\theta.Sen\,\beta.tg\,\gamma} \qquad \text{Resp.}$$

76.—Las componentes de la velocidad de una cierta particula expresada en coordenadas esféricas son: $V_R = 4$ Pulg./Seg., $V_\theta = -3$ Pulg./Seg. y $V_\phi = 2$ Pulg./Seg. para el instante $\theta = 30^o$ y $\phi = 60^o$. Determine las componentes X, Y, Z, de la velocidad por transformación directa de coordenadas.

SOLUCION

Usaremos la sgte matríz de transformación [Ver apéndice]

$$\{Vxyz\} = [T_\theta]^{-1}[T_\phi]^{1}\{V_{R\theta\phi}\}$$

Deducimos:

$$V_x = V_R \cos\theta . \cos\phi - V_\theta \operatorname{Sen}\theta - V_\phi \operatorname{Sen}\phi \cos\theta$$
$$V_y = V_R \operatorname{Sen}\theta . \cos\phi + V_\theta \cos\theta - V_\phi \operatorname{Sen}\phi \operatorname{Sen}\theta$$
$$V_z = V_R \operatorname{Sen}\phi \quad + 0 \quad + V_\phi \cos\phi$$

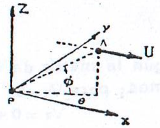
Sustituyendo valores numéricos

$$V_x = 4\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$V_y = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$V_z = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1$$

Simplificando:

$$V_x = \sqrt{3} \quad \text{Pulg./Seg}$$
$$V_y = -\sqrt{3} \quad \text{Pulg./Seg} \qquad \text{Resp.}$$
$$V_z = 4.47 \quad \text{Pulg./Seg}$$

77.—La antena radar P, rastrea a la nave aérea A que vuela horizontalmente con una rapidez U como se muestra. Hallar las componentes de la velocidad en coordenadas esféricas respecto a la antena.



SOLUCION

Según el gráfico:

$$V = Ui + OJ + OK$$

Luego:

$$V_x = U \quad \text{.................................} \quad (I)$$
$$V_Y = 0$$
$$V_Z = 0$$

Segun la matriz de transformación:

$$\{V_{R\theta\phi}\} = [T_\phi][T_\theta]\{V_{XYZ}\}$$

Tenemos:

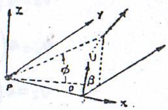
$$V_R = V_X \cos\phi \cos.\theta + 0 + 0$$
$$V_\theta = -V_X \mathrm{Sen.}\theta + 0 + 0$$
$$V_\phi = -V_X \mathrm{Sen}\,\phi \cos.\theta - 0 + 0$$

Reemplazando (I)

$$V_R = U \cos.\phi \cos.\theta$$
$$V_\theta = -U \mathrm{Sen.}\theta$$
$$V_\phi = -U \mathrm{Sen.}\phi \cos.\theta$$

Resp.

78.—Un proyectil es lanzado con velocidad inicial U en ángulo β con la horizontal. Expresar la velocidad azimutal $\dot{\theta}$ y la velocidad de elevación $\dot{\phi}$ de la antena de radar que desde P rastrea al proyectil en función de las coordenadas esféricas y el tiempo de vuelo t desde el punto de partida 0. Desprecie la resistencia del aire.



SOLUCION

La velocidad en coordenadas esféricas está definida por:

$$V_R = \dot{R} \quad \text{.......... (I)}$$
$$V_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi \quad \text{.......... (II)}$$
$$V_\phi = R\dot{\phi} \quad \text{.......... (III)}$$

Según el gráfico:

$$V_X = 0 \quad \text{.......... (IV)}$$
$$V_Y = u.\cos\beta \quad \text{.......... (V)}$$
$$V_Z = u.\mathrm{Sen}\,\beta \quad \text{.......... (VI)}$$

Según la matríz de transformación usada en el problema 77 hallamos; para $V_X = 0$

$$V_R = 0 + V_Y \cos\phi\, \mathrm{Sen}\theta + V_Z\, \mathrm{Sen}\,\phi \quad \text{.......... (A)}$$
$$V_\theta = 0 + V_Y \cos\theta \quad + 0 \quad \text{.......... (B)}$$
$$V_\phi = 0 - V_Y \mathrm{Sen}\phi\, \mathrm{Sen}\theta + V_Z \cos\phi \quad \text{.......... (C)}$$

Igualando (II) con (B) y (III) con (C) tendremos:

$$\dot{\theta} = \frac{V_Y \cos\theta}{R \cdot \cos\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R}\left[V_Z \cos\phi - V_Y \mathrm{Sen}\phi\, \mathrm{Sen}\,\theta\right]$$

Además , según el gráfico:

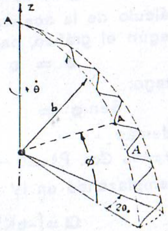
$$R = \frac{b}{\text{Cos}\ \theta\ \text{Cos.}\ \phi}$$

Reemplazando valores y simplificando tendremos:

$$\dot{\theta} = \frac{u}{b}\ \text{Cos.}\ \beta\ .\ \text{Cos.}^2\ \theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{u}{4b}\left[4\ \text{Sen.}\ \beta\ .\text{Cos.}\ \theta\text{Cos.}^2\phi - \text{Cos.}\ \beta\cdot\text{Sen.}2\theta\cdot\text{Sen.}2\phi\right]$$

79.—La antena de radar rastrera oscila alrededor de su eje vertical de acuerdo a $\theta = \theta_o.\text{Cos. pt.}$, donde p es la frecuencia circular constante y $2\theta_o$. es la doble amplitud de oscilación. Simultáneamente el ángulo de elevación ϕ es incrementado a razón constante $\dot{\phi} = K$. Determine la magnitud de la aceleración del asta de señales: a) cuando pasa por la posición A, y b) cuando pasa por la posición B, asumiendo que en este instante $\theta = 0$.



SOLUCION

En coordenadas esféricas la aceleración está definida por:

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\text{Cos}^2\phi \quad \text{.................................} \quad [I]$$

$$a_\theta = 2\dot{R}\dot{\theta}\ \text{Cos.}\ \phi + R\ddot{\theta}\ \text{Cos.}\ \phi - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}.\ \text{Sen}\ \phi \text{.......} [II]$$

$$a_\phi = 2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2\ \text{Sen.}\phi\ .\text{Cos}\ \phi \text{...........................} [III]$$

Por condiciones del problema:

$$\theta = \theta_o.\text{Cos.pt} \quad ; \quad R = b \quad ; \quad \dot{\phi} = K$$

Derivando:

$$\dot{\theta} = -P\theta_o\ \text{Sen.pt} \quad ; \quad \dot{R} = 0 \quad ; \quad \ddot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\theta} = -P^2\ \theta_o\text{Cos.pt} \quad ; \quad R = 0 \quad ; \quad \phi = kt$$

Reemplazando estos valores en I , II y III

$$a_R = -bK^2 - bP^2\ \theta_o^2\ \text{Sen.}^2\ \text{Pt}\ .\text{Cos}^2.\phi \text{.............................} [IV]$$

$$a_\theta = -bP^2\ \theta_o\ \text{Cos. Pt Cos.}\ \phi + 2bKP\theta_o.\text{Sen. Pt. Sen.}\phi \quad [V]$$

$$a_\phi = bP^2\ \theta_o^2\ \text{Sen. Pt Sen.}\ \phi.\text{Cos.}\phi \quad \text{.......................} [VI]$$

Cálculo de la aceleración para la primera condición:

Cuando pasa por A $\longrightarrow \dot{\theta} = 0$ puesto que hay cambio de direccion. Luego:

$$\dot{\theta} = -P\theta_o\text{Sen.Pt} = 0$$

Para esta condición de $\dot{\theta}$ tenemos:

P y $\theta_o \neq 0$; entonces :

$\text{Sen}.\, Pt = 0 \quad , \quad \text{Cos}\, Pt = 1$

Sabemos además que

$$a = a_R + a_\theta + a_\phi$$

Dando valores hallados:

$$a = [-bK^2]_R + [0]_\phi + [-bP^2\theta_o\, \text{Cos}\, pt.\text{Cos}\,\phi]_\theta$$

El módulo será:

$$a = \sqrt{[-bK^2]^2 + [-bP^2\,\theta_o\ \text{Cos}.Pt\,\text{Cos}\,\phi]^2}$$

Finalmente:

$$a = b\sqrt{K^4 + P^4.\theta_o^2.\text{Cos}^2\phi} \quad \text{.......................} \quad \textbf{Resp.}$$

Cálculo de la aceleración para la Segunda condición.

Según el gráfico, para ese instante:

$$\theta = 0 \quad ; \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\text{Sen}\,\phi = 1 \quad ; \quad \text{Cos}\,\phi = 0$$

Además

$\theta = \theta_o$ Cos. $Pt = 0 \rightarrow$ Cos. $Pt = 0$ $\qquad$ SenPt $= 1$

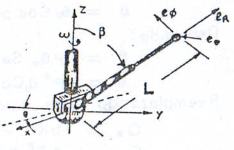
Reemplazando en IV . V y VI :

$$a = [-bK^2]_R + [2\,bKP\,\theta_o\ \text{Sen}\,Pt\ .\text{Sen}\,\phi]_\theta$$

El módulo será:

$$a = bK\sqrt{K^2 + 4P^2\theta_o^2} \qquad \textbf{Resp.}$$

80.—En una prueba de funcionamiento del mecanismo para antena telescópica de una nave espacial, el eje soporte rota alrededor del eje fijo Z con velocidad angular ω Determine las componentes R, θ, y φ de la aceleración del extremo de la antena, en el instante para el cual: L = 4 pies, β = 45° si ω = 2 rad./Seg., $\dot{\beta}$ = 3/2 rad./Seg. y $\dot{L}$ = 3 pies/Seg. son constantes durante el movimiento.



SOLUCION

Las componentes de la aceleración en coordenadas esféricas están definidas por:

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\text{Cos}^2\phi \ \text{.......................} \quad \text{(I)}$$

$$a_\theta = \text{Cos}\,\phi\ (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\ .\ \text{Sen}\,\phi \ \text{........} \quad \text{(II)}$$

$$a_\phi = 2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2\ \text{Sen}.\,\phi\ .\text{Cos}\,\phi \ \text{........} \quad \text{(III)}$$

Además del enunciado del problema se deduce:

$$R = L = 4 \text{ pies} \qquad \phi = -\beta = -45^\circ$$
$$\dot{R} = \dot{L} = 3 \text{ pies/seg} \qquad \dot{\phi} = -\dot{\beta} = \frac{-3}{2} \text{ rad./seg.}$$
$$\ddot{R} = \ddot{L} = 0 \qquad \ddot{\phi} = -\ddot{\beta} = 0$$
$$\dot{\theta} = 2 \text{ rad/seg.} \qquad \ddot{\theta} = 0$$

Reemplazando valores en la ecuación I :

$$a_R = -4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a_R = -17 \text{ pies/seg}^2$$ Resp.

Reemplazando valores en la ecuación(II):

$$a_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 \times 3 \times 2 + 0\right) - 2(4)(2)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_\theta = 25.5 \text{ pies/seg}^2$$ Resp.

Reemplazando valores en la ecuación(III):

$$a_\phi = 2(3)\left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + 4(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a_\phi = -1 \text{ pies/seg}^2$$ Resp.

81.—Reforzando la prueba de operación del mecanismo de control de la antena telescópica del problema anterior, el eje vertical se hace oscilar alrededor del eje fijo Z, según: $\theta = \pi/4 + 0.12 \text{ Sen. } 4\pi t$, donde θ se mide en radianes y t en segundos. Durante la oscilación β es incrementado a razón de 3/2 rad./Seg. y L a razón de 3 pies/Seg. ambas constantes. Determine la magnitud de la aceleración del extremo de la antena cuando $\beta = 60°$ si ello ocurre en la posición: $\theta = \pi/4$ y L = 4 pies.

SOLUCION

Por condiciónes del enunciado :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 0.12 \text{ . Sen.} 4\pi t \quad \dots\dots\dots\dots \text{(A)}$$

Derivando :

$$\dot{\theta} = (4\pi)\, 0.12 \text{ . Cos. } 4\pi t \quad \dots\dots\dots\dots \text{(B)}$$
$$\ddot{\theta} = -(16\pi^2)\, 0.12 \text{ . Sen. } 4\pi t \quad \dots\dots\dots\dots \text{(C)}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ la ecuación (A) se transforma:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 0.12 \text{ Sen} 4\pi t \longrightarrow \text{Sen} 4\pi t = 0$$

Luego deducimos que : $t = 0$ Ⓓ

Reemplazando D en las ecuaciones B y C hallamos:

$$\dot\theta = 0.48\,\pi \ \text{rad/seg.}$$
$$\ddot\theta = 0 \ \text{rad/seg}^2$$

Además por condiciones del enunciado concluimos:

$$R = L = 4 \ \text{pies} \quad ; \quad \beta = 60^\circ$$
$$\dot R = \dot L = 3 \ \text{pies/seg.} \quad ; \quad \dot\beta = \frac{3}{2}$$
$$\ddot R = \ddot L = \ddot\phi = 0 \quad ; \quad \phi = 90^\circ - \beta = 30^\circ$$
$$[\dot L \text{ y } \dot B] \rightarrow \text{constantes} \qquad \dot\phi = -\dot\beta = -\frac{3}{2} \ \text{rad/seg.}$$

Escribimos las ecuaciones de la aceleración en coordenadas esféricas:

$$a_R = \ddot R - R\dot\phi^2 - R\dot\theta^2 \cdot \cos^2\phi$$
$$a_\theta = \cos\phi\left(2\dot R\dot\theta + R^2\,\ddot\theta\right) - 2R\dot\theta\,\dot\phi \cdot \operatorname{Sen}\phi$$
$$a_\phi = 2\dot R\,\dot\phi + R\ddot\phi + R\dot\theta^2 \operatorname{Sen}\phi \cdot \cos\phi$$

Reemplazando valores tenemos:

$$a_R = 0 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4(0.48\,\pi)^2\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 = 15.85$$
$$a_\theta = \frac{\sqrt3}{2}\left([2][3][0.48\,\pi] + 0\right) - 2(4)(0.48\pi)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 5.05$$
$$a_\phi = 2(3)\left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + 4(0.48\pi)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right) = 16.9$$

El módulo del vector estará definido por :

$$a = \sqrt{[15.85]^2 + [5.05]^2 + [16.9]^2}$$

Luego: $a = 23.7 \ \text{pies/seg.}^2$ Resp.

82.—Use los resultados del problema 80 y determine las componente X, Y, Z, de la aceleración de la antena telescópica según las condiciones especificadas para la posición $\theta = 45^\circ$

SOLUCION

En el problema 80 deducimos:

$$a_R = -17 \ \text{pies/seg.}^2$$
$$a_\theta = 25.5 \ \text{pies/seg.}^2$$
$$a_\phi = -1 \ \text{pies/seg.}^2$$

Además: $\theta = 45^\circ$ $\phi = 45^\circ$

Usando la matriz de transformación : [Ver apéndice]

$$\{a_{xyz}\} = [T_\theta]^{-1}[T_\phi]^{-1}\{a_{R\theta\phi}\}$$

Se deduce . $a_x = a_R \cos.\theta.\cos.\phi - a_\theta \cdot \text{Sen}.\theta - a_\phi \cos.\theta.\text{Sen}.\phi$

$a_y = a_R.\text{Sen}.\theta \cos.\phi + a_\theta \cos.\theta - a_\phi \text{Sen}.\theta \text{ Sen}.\phi$

$a_z = a_R.\text{Sen}.\phi + 0 + a_\phi \cos.\phi$

Reemplazando valores numéricos

$$a_x = -17(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - 25.5(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)$$

$$a_y = -17(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2) + 25.5(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)$$

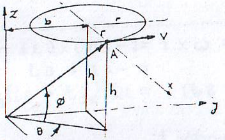
$$a_z = -17(\sqrt{2}/2) + 0 - \sqrt{2}/2$$

Luego simplificando

$a_x = -26.1$ pies/Seg2.

$a_y = 10.1$ pies/Seg2

$a_z = -12.73$ pies/Seg2. Resp



A.4.—El avión mostrado vuela con rapidez constante V en el círculo horizontal de radio r y altura h. Determinar las componentes de su aceleración expresadas en función de las coordenadas esféricas adheridas al radar fijo que lo detecta.

La aceleración de A esta definida por la ecuación

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \alpha \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}] \qquad \text{(I)}.$$

Según el gráfico y el enunciado se afirma

$\mathbf{a}_0 = 0$ (O punto fijo)

$\alpha \times \mathbf{r} = 0$ Puesto que $V =$ constante

$$\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}] = (\mathbf{\Omega}.\mathbf{r})\mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega})\mathbf{r} = 0 - \Omega^2 \mathbf{r}$$

siendo $\mathbf{\Omega}.\mathbf{r} = 0 \longleftarrow \mathbf{\Omega} \perp \mathbf{r}$

Reemplazando valores en la ecuación I:

$$\mathbf{a}_A = 0 + 0 - \Omega^2 r \qquad \text{Donde } \Omega = \frac{V}{r} \quad ; \mathbf{r} = r\,\imath$$

Luego $\mathbf{a}_A = -\dfrac{V^2}{r}\imath + 0J + 0K$ (II)

Segun la ecuación (II) y la matriz de transformacion

$\{a_{R\theta\phi}\} = [T_\phi][T_\theta]\{a_{xyz}\}$, se deduce

$$\begin{Bmatrix} a_R \\ a_\theta \\ a_\phi \end{Bmatrix} = [T_\phi][T_\theta] \begin{Bmatrix} -V^2/r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\text{Ver apéndice Matrices}\}$$

Luego desarrollando

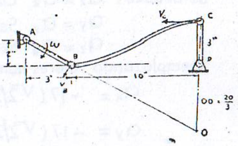
$$a_R = -\frac{V^2}{r}\cos\theta.\cos.\phi$$

$$a_\theta = \frac{V^2}{r}\text{Sen}.\theta$$

$$a_\phi = \frac{V^2}{r}\cos.\theta \text{ Sen}.\phi$$

Resp

83.—El mecanismo de eslabonamiento mostrado, puede desplazarse en el plano vertical. En la posición indicada el eslabón A B tiene velocidad angular constante $\omega = 2$ rad./Seg. en sentido horario. Determinar para este instante la velocidad angular del eslabón C B y la velocidad lineal de C



SOLUCION:

Según la ecuación del movimiento relativo para las velocidades de C y B se afirma.

$$V_C = V_B + V_{C/B} \qquad \text{.......................................} \quad (I)$$

donde: $\quad V_C = -V_C \mathbf{i} \quad , \quad V_B = \omega \times r = (-2K) \times (3\mathbf{i} - 2J)$

$$= -4\mathbf{i} - 6J$$

$$V_{C/B} = \Omega_{BC} K \times (10\mathbf{i} + 3J) \quad = 10\Omega_{BC} J - 3\Omega_{BC}\mathbf{i}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación I:

$$-V_C \mathbf{i} = -6J - 4\mathbf{i} + 10\Omega_{BC} J - 3\Omega_{BC}\mathbf{i}$$

$$V_C \mathbf{i} = (4 + 3\Omega_{BC})\mathbf{i} + (6 - 10\Omega_{BC}) J \quad \text{pies/Seg.}$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

$$V_C = 4 + 3\Omega_{BC}$$

$$0 = 6 - 10\Omega_{BC} \longrightarrow \Omega_{BC} = 0.6 \text{ rad./Seg} \text{ .... Resp.}$$

$$V_C = 4 + 3(0.6) \longrightarrow V_C = 5.8 \text{ pies/Seg.} \text{ .... Resp.}$$

La intersección O de las rectas que pasan por AB y CD es el centro instantáneo o polo de velocidades de V_B y V_C. Por tanto:

$$\Omega_{BC} = \frac{V_B}{OB} = \frac{V_C}{OC}$$

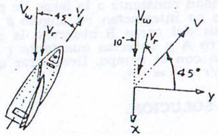
donde: $\quad OC = 29/3 \; ; \; OB = 10\sqrt{13}/3$

Luego $\quad V_B = \omega r = (2)(\sqrt{4+9}) = 2\sqrt{13} \ \frac{\text{pies}}{\text{Seg}}$

$$\Omega_{BC} = \frac{2\sqrt{13}}{10\sqrt{13}/3} \longrightarrow \Omega_{BC} = 0.6 \text{ rad./Seg .... Resp.}$$

$$V_C = \Omega_{BC}(OC) = 0.6(29/3) \longrightarrow V_C = 5.8 \text{ pies/Seg. ..... Resp.}$$

84.—Un velero está virando en dirección Nor-este accionado por viento del Norte. La proa registra la velocidad de las olas de 6 nudos y un cordel templador sujeto en la borda, indica que la dirección aparente del viento forma ángulo de 35° con la línea de eje del velero como se muestra. Hallar la verdadera velocidad V_V del viento.



SOLUCION:

Según el enunciado en la dirección aparente del viento actúa un vector velocidad relativa al velero.

Por lo tanto :

$$V_{viento} = V_{velero} + V_{viento/velero}$$

Luego según el gráfico se deduce:

$$V_V I = V(\,\text{Cos. } 45° J - \text{Sen. } 45° I) + V_r(\,\text{Cos. } 10° I - \text{Sen. } 10° J)$$

$$V_V I = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(J - I) + V_r(0.9848\, I - 0.17364\, J)$$

$$V_V I = (-3\sqrt{2} + 0.9848\, V_r)\, I + (3\sqrt{2} - 0.17364\, V_r)\, J$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección :

$$V_V = -3\sqrt{2} + 0.9848\, V_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$0 = 3\sqrt{2} - 0.17364\, V_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones 1 y 2 se obtiene:

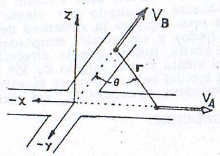
$$V_V = 3\sqrt{2}\left[\frac{98.48}{17.364} - 1\right] = 3\sqrt{2}(4.66) \text{ Nudos}$$

Por tanto:

$$V_V = 19.8 \quad \text{Nudos}$$

Resp.

85.—Los carros A y B se mueven con velocidad constante a lo largo de pistas rectas que se intersectan en ángulo β. Los pasajeros del carro B observan la posición del carro A y aprecian que tanto r como θ varían con el tiempo. Demostrar que: $\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}/r$ y $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2$.



SOLUCION:

Considerando B como punto base la ecuación de V_A será:

$$V_A = V_B + V_{A/B} \text{ , donde } \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$V_A = V_A\,i \quad [\text{constante}]$$

$$V_B = V_B\,J \quad [\text{constante}]$$

$$V_{A/B} = V_r + V_\theta = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$$

Sustituyendo los valores deducidos en la ecuación (A)

$$V_A i = V_B J + \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Derivando la expresión B recordando que:

$$\dot{e}_r = \dot{\theta}e_\theta \quad ; \quad \dot{e}_\theta = -\dot{\theta}e_r$$

$$0i = 0J + \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + r\ddot{\theta}e_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r$$

Ordenando:

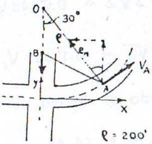
$$0 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta$$

Igualando componentes en ambos miembros:

$$0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \quad \text{L.qqd.}$$

87.—El carro A se desplaza en la pista curva de 200 pies de radio con rapidez constante de 30 millas/hr. Cuando A y B pasan por la posición mostrada, B está acelerando hacia la intersección de las pistas a razón de 4 pies/Seg². Determine la aceleración que A parece tener cuando es observado por un pasajero de B en dicho instante.



SOLUCION:

La aceleracion que parece tener A visto desde B es $a_{A/B}$

Para el movimiento relativo de A y B se cumple:

$$a_A = a_B + a_{A/B} \longrightarrow a_{A/B} = a_A - a_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

donde según el diagrama y datos se deduce:

$$e_n = \text{Cos. } 30° J - \text{Sen. } 30° \lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3} J - \lambda) \ ;$$

$$V_A = 30\left(\frac{44}{30}\right) = 44 \ \text{pies/Seg.}$$

$$a_A = a_t + a_n = \bar{0} + \frac{V_A^2}{\rho} e_n = \frac{(44)^2}{200}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} J - \frac{1}{2}\lambda\right) =$$

$$= \frac{121}{25}(\sqrt{3} J - \lambda) \ \text{pies/Seg2.} \quad [II]$$

$$a_B = -a_B J = -4J \ \text{pies/Seg2.} \quad \dots\dots\dots\dots \quad [III]$$

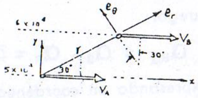
Sustituyendo las ecuaciones II y III en I se obtiene:

$$a_{A/B} = \frac{121}{25}(\sqrt{3} J \quad \lambda) + 4J = 12.38 J - 4.84 \lambda \ \text{pies/Seg2.}$$

cuyo módulo es :

$$a_{A/B} = \sqrt{a_A^2 + a_B^2} = \sqrt{(12.38)^2 + (4.84)^2} \longrightarrow \boxed{a_{A/B} = 13.3 \frac{\text{pies}}{\text{Seg2.}}}$$

88.—El avión A con equipo detector está volando horizontalmente a 50,000 pies, y acelera a razón de 3 pies/Seg². Su equipo detecta a un avión que vuela en el mismo plano y en la misma dirección a una altura de 60,000 pies. Si A tiene una rapidez de 500 millas/hr. en el instante en que θ = 30º, determine los valores de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ en el mismo instante si B tiene una rapidez constante de 900 millas/hr.



SOLUCION:

Transformando unidades [Ver apéndice]

$$V_A = 500\left[\frac{44}{30}\right] = 733.33 \ \text{pies/Seg.}$$

$$V_B = 900\left[\frac{44}{30}\right] = 1{,}320 \ \text{pies/Seg.}$$

La ecuación de velocidades que relaciona A y B se expresa:

$$V_B = V_A + V_{B/A} \longrightarrow V_{B/A} = V_B - V_A$$

Por lo tanto:

① .... $V_{B/A} = (1{,}320 - 733.33)\lambda = 586.67 \ \lambda$ pies/Seg.

Donde $V_{B/A}$ es la velocidad relativa de B respecto a A , la cual expresada en coordenadas polares será:

$$V_{B/A} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \text{donde: } \mathbf{e}_r = \text{Cos.}\,\theta\imath + \text{Sen.}\,\theta J$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\,\text{Sen.}\,\theta\imath + \text{Cos.}\,\theta J$$
$$r = 10^4 \ \text{Cosc.}30^\circ = 20{,}000 \text{ pies}$$

Luego :

$$V_{B/A} = \dot{r}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\imath + \frac{1}{2}J\right) + 2 \times 10^4\dot{\theta}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}J - \frac{1}{2}\imath\right)$$

$$② \text{ -----} \ V_{B/A} = \left(\frac{\dot{r}\sqrt{3}}{2} - 10^4\dot{\theta}\right)\imath + \left[\frac{\dot{r}}{2} + 10^4(\sqrt{3})\dot{\theta}\right]J$$

Igualando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene:

$$586.67\,\imath = \left[\frac{\dot{r}\sqrt{3}}{2} - 10^4\dot{\theta}\right]\imath + \left[\frac{\dot{r}}{2} + 10^4(\sqrt{3})\dot{\theta}\right]J$$

Estableciendo la igualdad de módulos se obtiene el sistema A, B:

$$586.67 = \frac{\dot{r}\sqrt{3}}{2} - 10^4\dot{\theta} \quad \text{..............................} \ Ⓐ$$

$$0 = \frac{\dot{r}}{2} - 10^4(\sqrt{3})\dot{\theta} \quad \text{..............................} \ Ⓑ$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene: $\dot{\theta} = 34.1$ rad./Seg [I].
$\dot{r} = 118.2 \times 10^4$ pies/Seg.

Similarmente se afirma: $a_B = a_A + a_{B/A}$

Luego:

$$a_{B/A} = a_B - a_A = \bar{0} - 3\imath = -3\imath \text{ pies/Seg2.} \ \{V_B = \text{constante}\}$$

Expresando en coordenadas polares el valor deducido se obtiene:

$$a_{B/A} = -3\imath = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \ \text{....................} Ⓒ$$

donde: $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ se conocen (Ecuaciones I)

e $\imath = \text{Cos.}\,\theta.\mathbf{e}_r - \text{Sen.}\,\theta.\mathbf{e}_\theta$

Sustituyendo dicho valores en la ecuación (C) se obtiene:

$$-3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\mathbf{e}_r + 3\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

Igualando módulos y reemplazando valores numéricos se obtiene:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - 2 \times 10^4(31.4)^2 \ \text{....................} \ D$$

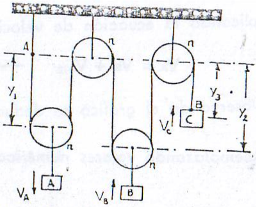
$$\frac{3}{2} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2 \times 10^4\ddot{\theta} + 2(34.1)(118.2 \times 10^4) \text{.....} \ E$$

Resolviendo las ecuaciones D, E se obtiene:

$$\ddot{r} = 23.4 \times 10^{6} \text{ ples/Seg2.}$$

$$\ddot{\theta} = 42.05 \times 10^{3} \text{ rad./Seg2.} \qquad \text{Resp.}$$

89.—Los tres bloques de la figura adjunta se desplazan con velocidades constantes. Hallar la velocidad de cada bloque sabiendo que desde B se observa que C se desplaza hacia arriba con una velocidad de 7 pies/seg. y que A, visto desde B, se desplaza hacia abajo con velocidad de 6 pies/seg.



SOLUCION:

Según el enunciado se conocen las siguientes velocidades relativas:

$$V_{C/B} = 7 \text{ pies/Seg.} \quad ; \quad V_{A/B} = -6 \text{ pies/Seg.}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de velocidades se obtiene:

{ En la dirección y }

$$V_C = V_B + V_{C/B} \longrightarrow V_C = V_B + 7 \text{ pies/Seg.} \qquad [I]$$

$$V_A = V_B + V_{A/B} \longrightarrow V_A = V_B - 6 \text{ pies/Seg.} \qquad [II]$$

Considerando que la longitud AB de la cuerda es constante, lo mismo que las porciones de magnitud n que envuelven a las poleas, se deduce:

$$2Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + 4n = AB \qquad \{ AB \text{ y } n \text{ constantes} \}$$

Derivando respecto al tiempo, observando que:
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= V_A \\ \dot{Y}_2 &= V_B \\ \dot{Y}_3 &= V_C \end{aligned} \right.$$

$$2\dot{Y}_1 + 2\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = 0 \longrightarrow 2V_A + 2V_B + V_C = 0 \qquad [III]$$

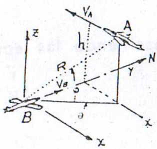
Resolviendo el sistema de ecuaciones I, II, III se obtiene:

$$V_A = -5 \longrightarrow V_A = 5 \text{ pies/Seg.} \quad \{ \text{hacia abajo} \}$$

$$V_B = 1 \longrightarrow V_B = 1 \text{ pies/Seg.} \quad \{ \text{hacia arriba} \}$$

$$V_C = 8 \longrightarrow V_C = 8 \text{ pies/Seg.} \quad \{ \text{hacia arriba} \}$$

91.—El radar del avión B que vuela horizontalmente hacia el Norte con velocidad de 600 millas/Hr. y a una altura h por debajo de A, detecta al avión A que vuela horizontalmente hacia el Oeste con velocidad de 800 millas/Hr. Calcular el ángulo θ del haz de radar mostrado tal que la distancia R entre los dos aviones se mantenga constante momentáneamente



SOLUCION:

Aplicando la ecuación de velocidades tomando B como punto base:

$$V_A = V_B + V_{A/B} \longrightarrow V_{A/B} = V_A - V_B$$

Observando el gráfico se deduce: $V_{A/B} = -V_A\, i - V_B\, J$

Reemplazando valores numéricos: $V_{A/B} = -800\, i - 600\, J$ millas/hr.

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = -800 \text{ mill/hr} \\ V_y = -600 \text{ mill/hr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ V_z = 0 \end{array} \right.$$

Además: R = constante $\longrightarrow \dot{R} = V_R = 0$

Luego usando la matriz de transformación:

$$\{V_{R\theta\phi}\} = [T_\phi][T_\theta]\{V_{xyz}\}$$

se afirma: (Ver Apéndice)

$$V_R = 0 = \text{Cos.}\,\phi\ \text{Cos.}\,\theta\ V_x + \text{Cos}\,\phi\ \text{Sen}\,\theta V_y + \text{Sen.}\,\phi V_z \ldots\ldots\ldots (2)$$

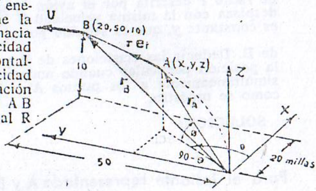
Reemplazando las ecuaciones 1 en 2 se deduce:

$$0 = \text{Cos}\,\phi\ \text{Cos.}\,\theta(-800) + \text{Cos.}\,\phi\ \text{Sen.}\theta(-600) + \text{Sen}\,\phi\ (0)$$

Simplificando se obtiene

$$\text{tg.}\theta = -\frac{4}{3} \longrightarrow \theta = 126^\circ 52'$$ Resp.

94.—Desde el punto O se lanza el proyectil dirigido A, para perseguir al avión enemigo B. Un mecanismo guía mantiene la dirección de vuelo dirigida siempre hacia B. Cuando el proyectil tiene por velocidad 2,500 millas/Hr. el avión vuela horizontalmente en dirección Norte con velocidad $U = 800$ millas/Hr. Calcular la variación $\dot{r}$ con la cual disminuye la distancia A B en el instante representado para el cual $R = 30$ millas, $\theta = 60°$ y $\varnothing = 12°$



SOLUCION:

Según se observa en el gráfico:

$$r_B = r_A + r_{B/A} \longrightarrow r_{B/A} = r_B - r_A$$

Derivando: $\dot{r}_{B/A} = \dot{r}_B - \dot{r}_A$

Por condición del problema $\dot{r}_{B/A} = \dot{r}_B J - \dot{r}_A e_t$ .... [I]

Cálculo del vector unitario. e_t {En la dirección **AB**}

Las coordenadas de B son . B (20, 50, 10)

Las coordenadas de A son A (x, y, z) {ver gráfico}

donde:

$$X = R \cos\phi . \cos\theta = R. \cos 12° \cos 60° = 30(0.9781)(1/2) = 14.7$$

$$Y = R \cos\phi . \operatorname{Sen}\theta = R. \cos 12° \operatorname{Sen} 60° = 30(0\ 9781)(\sqrt{3}/2) = 25.43$$

$$Z = R \operatorname{Sen}\phi = R. \operatorname{Sen} 12° = 30(0.2079) = 6.237$$

Por tanto.

$$BA = (20 - 14.7)\,I + (50 - 25.43)\,J + (10 - 6.237)\,K$$

$$BA = 5.3\,I + 24.57\,J + 3.763\,K \text{ millas}$$

$$e_t = \frac{BA}{|BA|} = \frac{5.3\,I + 24.57\,J + 3.763\,K}{\sqrt{28.1 + 603.7 + 14.13}} =$$

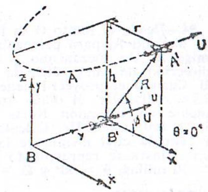
$$= \frac{1}{25.5}(5.3\,I + 24\ 57\,J + 3.763\,K)$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación I se obtiene

$$\dot{r}_{B/A} = 800\,J - 2{,}500\left(\frac{1}{25.5}\right)(5.3\,I + 24.57\,J + 3.763\,K)$$

$$\dot{r}_{B/A} = \sqrt{(1{,}607.9)^2 + (519.4)^2 + (368.5)^2} \longrightarrow \dot{r}_{B/A} = 1{,}730 \text{ millas/hr}$$

92.—El avión B vuela en línea recta horizontal con velocidad U y a una altura h, por debajo del centro de la circunferencia de radio r descrita por el avión A; que se desplaza con la misma velocidad U la cual es constante y, que es seguido por el radar de B. Deducir las ecuaciones de $\ddot{R}$ y $\ddot{\varnothing}$ en la posición particular cuando ambos llegan simultáneamente a los puntos A' y B' tal como se muestra.



SOLUCION:

Para el instante representado A y B tienen iguales direcciones. Considerando B' como centro del sistema de coordenadas absolutos, para la aceleración relativa de A respecto a B se afirma:

$$a_{A/B} = a_A - a_B \text{ . Siendo: } a_A = a_n + a_t = -U^2/r\, I + \dot{U} J = -U^2/r\, I$$

$$a_B = \dot{U} J = 0\, J \quad \{U \text{ es constante}\}$$

$$a_{A/B} = -U^2/r\, I + 0J + 0K \longrightarrow \{a_x = U^2/r \;;\; a_y = a_z = 0 \quad [I]$$

Las ecuaciones anteriores [I] pueden expresarse en función de las coordenadas esféricas usando la matriz de transformación:

$$\begin{Bmatrix} a_R \\ a_\theta \\ a_\phi \end{Bmatrix} = \left[T_\phi\right]\left[T_\theta\right] \begin{Bmatrix} U^2/r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\text{Ver apéndice: Matrices}\}$$

Desarrollando:

$$a_R = U^2/r \,.\, \text{Cos.}\,\phi \,.\, \text{Cos.}\,\theta \text{ ---------------- [A]}$$

$$a_\phi = -U^2/r \,.\, \text{Sen.}\,\phi \;\text{Cos.}\,\theta \text{ ---------------- [B]}$$

Además, puesto que : $a_B = 0$ la aceleración de $a_{A/B}$ expresada en coordenadas esféricas según el diagrama será:

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\,\dot{\theta}^2 . \text{Cos.}^2\phi \text{ --------------- [C]}$$

$$a_\phi = R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} + R\dot{\theta}^2 \text{ Sen.}\,\phi . \text{Cos.}\,\phi \text{ ---- [D]}$$

Igualando las ecuaciones A con C y B con D y simplificando se obtiene:

$$\ddot{R} = U^2 \text{ Cos.}\,\phi . \text{ Cos.}\,\theta/r + R\,(\,\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 . \text{Cos.}^2\,\phi\,)$$

$$\ddot{\phi} = -(\,U^2 . \text{ Sen.}\,\phi . \text{Cos.}\,\theta/rR + 2\dot{R}\dot{\phi}/R + \dot{\theta}^2 \text{ Sen.}\,\phi . \text{ Cos.}\,\phi\,)$$

Pero para el instante particular del problema: (Ver gráfico)

Sen. $\phi = h/R$ $\quad\quad \theta = 0 \longrightarrow \cos\theta = 1$

Cos. $\phi = r/R$ $\quad\quad \dot{\theta} = 0$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones deducidas de $\ddot{R}$ y $\ddot{\phi}$, se obtiene:

$$\ddot{R} = U^2/R + R\dot{\phi}^2$$

$$\ddot{\phi} = U^2.h/rR^2 + 2\dot{R}\dot{\phi}/R \quad\quad \text{Resp.}$$

Movimiento Relativo a ejes en Rotación

Ecuaciones principales:

$$r_p = r = r_0 + \rho$$

$$V_p = \dot{r} = V_0 + V_r + V_{p/0'}$$

$$a_p = \ddot{r} = a_0 + a_r + [a_{p/0'}]_t + [a_{p/0'}]_n + a_c$$

O lo que es lo mismo:

$$r_p = r = \rho + r_0$$

$$V_p = \dot{r} = \dot{\rho}_r + \dot{r}_0 + \omega \times \rho$$

$$\underbrace{a_p = \ddot{r}}_{\text{Aceleración Absoluta}} = \underbrace{\ddot{\rho}_r}_{\text{Aceleración Relativa}} + \underbrace{\ddot{r}_0 + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)}_{\text{Aceleración del sistema de Coordenadas móviles}} + \underbrace{2\omega \times \dot{\rho}_r}_{\text{Aceleración de Coriolis}}$$

Donde:

r_p = Posición absoluta de la partícula P.

v_p = Velocidad absoluta de la partícula P.

a_p = Aceleración absoluta de la partícula P. ✓

$r_o = r_o$ = Posición absoluta de O (Orígen del sistema de coordenadas móviles)

$\dot{r}_o = v_o$ = Velocidad absoluta de O (Orígen del sistema de coordenadas móviles)

$\ddot{r}_o = a_o$ = Aceleración absoluta de O (Orígen del sistema de coordenadas móviles)

ρ = Posición relativa de P, respecto al sistema de coordenadas móviles)

$\dot{\rho}$ = Velocidad relativa de P, respecto al sistema de coordenadas móviles.

$\ddot{\rho}_r$ = Aceleración relativa de P, respecto al sistema de coordenadas móviles.

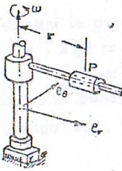
$\omega \times \rho$ = Velocidad debido a la rotación del sistema de coordenadas móviles.

$\dot{\omega} \times \rho$ = Aceleración tangencial por efecto de la aceleración angular del sistema de coordenadas móviles.

$\omega \times (\omega \times \rho)$ = Aceleración centrípeta debido al cambio de dirección de la velocidad relativa.

$2\omega \times \dot{\rho}_r$ = Aceleración de Coriolis por efecto de la inter-relación entre la velocidad angular y la velocidad relativa

96.—El cilindro mostrado se mueve a lo largo de la barra la cual rota en torno a su eje vertical con velocidad angular ω Suponer $r \neq 0$, $r \neq 0$ $\omega \neq 0$, y demostrar la equivalencia de las ecuaciones A y B pertenecientes a la aceleración de P



SOLUCION:

Las ecuaciones del enunciado son las siguientes

$$a_p = a_A + a_r + a_c \quad \text{.........} \quad (A)$$
$$a_p = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, e_\theta \quad \text{.........} \quad (B)$$

Consideremos como hipótesis la ecuación (A)
Con ayuda del gráfico se deduce

$$a_A = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad , \text{ siendo } \quad \bar{\omega} \perp \bar{r} \qquad (1)$$
$$a_A = \dot{\omega} K \times r e_r + \omega K \times (\omega K \times r e_r) = \dot{\omega} r e_\theta - \omega^2 r e_r$$
$$a_r = \ddot{r} e_r \quad \text{.........} \quad (2)$$
$$a_c = 2\omega \times V_r = 2\omega K \times \dot{r} e_r = 2\dot{r}\omega e_\theta \quad \text{.........} \quad (3)$$

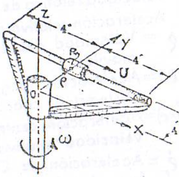
Sustituyendo las ecuaciones (1)(2) y(3)en (A)

$$a_p = \dot{\omega} r e_\theta - \omega^2 r e_r + \ddot{r} e_r + 2\dot{r}\omega e_\theta$$
$$a_p = (\ddot{r} - r\omega^2)\, e_r + (r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega)\, e_\theta$$

Considerando que $\quad \dot{\theta} = \omega \longrightarrow \ddot{\theta} = \dot{\omega}$ se obtiene:

$$a_p = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, e_\theta \qquad \text{L.q.q.d.}$$

98.—El cilindro P se desplaza a lo largo de la barra con velocidad constante U = 10 pies/seg. relativa a la barra en la posición mostrada. Simultáneamente la barra y el armazón rotan en torno al eje Z con velocidad angular constante $\omega = 30$ rad./seg. en sentido antihorario. Determinar la velocidad y aceleración absolutas de P cuando pasa por la posición central de la barra.



SOLUCION:

La ecuación de la velocidad absoluta de P es:

$$V_p = V_o + \omega \times \rho + V_r = \dot{r}_o + \omega \times \rho + \dot{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [I]$$

Puesto que O es origen de coordenadas:

$$r_o = \dot{r}_o = \ddot{r}_o = 0$$

El sistema de coordenadas móviles coinciden con el absoluto:

Por lo tanto:

$$\omega = \omega K = 30K \text{ rad./Seg}$$

$$\dot{\omega} = \bar{0}$$

$$\rho = \rho J = 4J \text{ Pulg.}$$

$$\dot{\rho} = \rho \dot{J} = U\lambda = 10\lambda \text{ pies/Seg}$$

$$\ddot{\rho} = 0\lambda \quad [\text{ U es constante }]$$

Sustituyendo en la ecuación [I] sus valores correspondientes

$$V_p = \bar{0} + 30K \times 4J + (10 \times 12)\lambda$$

$$V_p = -120\lambda + 120\lambda \longrightarrow V_p = 0\lambda \text{ Pulg./Seg} \quad \text{Resp}$$

La aceleración absoluta de P se obtiene derivando la ecuación I:

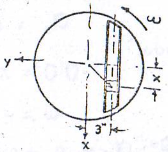
$$a_p = \ddot{r}_o + \dot{\omega} \times \rho - \omega^2 \rho + \ddot{\rho} + 2\omega \times \dot{\rho}$$

Reemplazando valores.

$$a_p = \bar{0} + \bar{0} - (30^2)(4/12)J + \bar{0} + 2(30K \times 10\lambda) \text{ pies/Seg}^2$$

$$a_p = -300J + 600J \longrightarrow a_p = 300J \text{ pies Seg} \quad \text{Resp}$$

99.—La muestra P se desplaza en la ranura. Simultáneamente el disco rota en torno a su centro 0 con velocidad angular positiva en sentido antihorario. Determine las componentes x e y de la aceleración absoluta de P en el instante representado, cuando $\omega = 5$ rad./seg., $\dot{\omega} = -10$ rad./seg.^{2} $x = 3$ pulg. $\dot{x} = 4$ pulg./seg y $\ddot{x}$ 6 pug./seg.^{2}



SOLUCION:

La aceleración total de P estará definida por la ecuación:

$$\alpha_P = \alpha_0 + \alpha_{P/O} + \alpha_r + \alpha_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Donde:

(1) $\alpha_0 = 0$, [O punto fijo]

$\alpha_{P/O} = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$ donde $r = 3(i - j)$

$\alpha_{P/O} = (10K) \times 3(i - j) + (-5K) \times [-5K \times 3(i - j)]$

(2) $\alpha_{P/O} = 30(j + i) + 75(j - i) = 105\,j - 45\,i$ Pulg./Seg2.

(3) $\alpha_r = \ddot{X}\, i = 6\,i$ Pulg./Seg2.

(4) $\alpha_c = 2\omega \times V_r = 2(-5K) \times 4\,i = -40\,j$ Pulg./Seg2.

Reemplazando 1, 2, 3 y 4 en la ecuación (I):

$\alpha_P = 0 + 105\,j - 45\,i + 6\,i - 40\,j$

$\alpha_P = -39\,i + 65\,j$ Pulg./Seg2. .... (II)

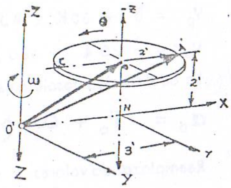
Además $\alpha_P = a_x i + a_y j$, por lo tanto de (II)

$a_x = -39$ Pulg./Seg2.

$a_y = 65$ Pulg./Seg2.

Resp.

100.—El eje del motor M y el disco adherido rotan en sentido antihorario visto desde arriba, con velocidad constante $\dot{\theta} = 3$ rad./seg. relativa al armazón del motor y brazo solidario OM. Simultáneamente el brazo rota en sentido horario con velocidad angular constante $\omega = 2$ rad./seg. Determine la aceleración absoluta de cada uno de los 4 puntos del disco en la posición mostrada.



SOLUCION:

La aceleración absoluta del punto A estará definida por la ecuación:

$$a_A = a_0 + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + \ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Donde según el enunciado y observando la figura se deduce:

$$a_0 = \dot{\omega} \times O'O + \omega \times (\omega \times O'O)$$

siendo:

$$O'O = X\,i + Z\,K = 3\,i + 2\,K \quad \text{pies}$$

$$\omega = -2K \quad [\text{constante.}] \longrightarrow \dot{\omega} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Luego: $a_0 = 0 + (-2K) \times [-2K \times (3\,i + 2K)] = -12\,i$ pies/Seg². (3)

Cálculo de $\ddot{r} \longrightarrow r = r\imath = 2\imath$

$$\dot{r} = \dot{\theta} \times r = (3K) \times (2\imath) = 6J$$

$$\ddot{r} = \ddot{\theta} \times r + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times r) = 0 + 3K \times (6J) = -18\imath \quad (4)$$

$$\omega \times (\omega \times r) = (-2K) \times (-2K \times 2\imath) = -8\imath \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

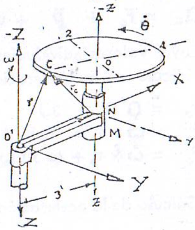
$$2\omega \times \dot{r} = 2(-2K \times 6J) = 24\imath \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2,3,4 y 5 en 1 se obtiene:

$$a_A = (-12 + 0 - 8 - 18 + 24)\imath = -14\imath \longrightarrow a_A = 14 \text{ pies/Seg2.}$$

OBSERVACION:

Se ha tomado O como punto base (Coordenadas móviles). Similarmente se puede elegir cualquier punto del cuerpo M.



Ejemplo:

Tomemos como punto base N y calculemos a_C, o sea:

$$a_C = a_N + \ddot{r}_C + \dot{\omega} \times r_C + \omega \times (\omega \times r_C) + 2\omega \times \dot{r}_C \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

donde:

$$a_N = \dot{\omega} \times O'N + \omega \times (\omega \times O'N) = 0 + (-2K) \times (-2K \times 3\imath) = -12\imath \quad (B)$$

Cálculo de $\ddot{r}_C \longrightarrow r_C = 2K - 2\imath = 2(K - \imath)$

$$\dot{r}_C = \dot{\theta} \times r_C = 3K \times 2(K - \imath) = -6J$$

$$\ddot{r}_C = \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times r_C) = 3K \times (-6J) = 18\imath \quad \ldots (C)$$

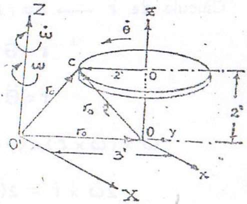
$$\omega \times (\omega \times r_C) = -2K \times [(-2K) \times 2(K - \imath)] = 8\imath \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

$$2\omega \times \dot{r} = 2(-2K) \times (-6J) = -24\imath \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Sustituyendo B, C, D y E en la ecuación: A

$$a_C = (-12 + 0 + 18 + 8 - 24)\imath = -10\imath \longrightarrow a_C = 10 \text{ pies/Seg2.}$$

101.— Si en el problema anterior la corriente eléctrica que alimenta al motor M, se ajusta tal que el disco continúe rotando con la misma velocidad angular $\dot{\theta} = 3$ rad./Seg. relativa al armazón del motor adherido al brazo OM; calcular la aceleración absoluta del punto C si para este instante la velocidad angular del brazo OM, $\omega = 2$ rad./Seg. se incrementa a razón de 10 rad./Seg. en cada segundo, en sentido horario visto desde arriba.



SOLUCION:

La aceleración absoluta de C está definida por la ecuacion:

$$a_c = a_o + a_{c/o} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times V_{c/o} \quad \text{.........} [I]$$

$$a_c = \ddot{r}_o + \ddot{\rho} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times \dot{\rho}$$

Cuyos valores individuales se deduce como sigue:

Cálculo de la aceleración de O.

$$r_o = O'O = 3J$$

$$\dot{r}_o = \omega \times r_o = -2K \times 3J = 6I$$

$$\ddot{r}_o = \dot{\omega} \times r_o + \omega \times (\omega \times r_o) = -10K \times 3J + (-2K) \times 6I =$$

$$= 30I - 12J \quad \text{......} (A)$$

Cálculo de la aceleración relativa de C respecto a O:

$$\rho = OC = -2J + 2K$$

$$\dot{\rho} = \dot{\theta} \times \rho = 3K \times (-2J + 2K) = 6I \qquad [\dot{\theta} = \text{Constante}]$$

$$\ddot{\rho} = \ddot{\theta} \times \rho + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times \rho) = \bar{0} + 3K \times 6I = 18J \quad [\ddot{\theta} = 0] \text{......} (B)$$

Cálculo de la aceleración relativa por efecto de la rotación:

$$\dot{\omega} \times \rho = -10K \times (-2J + 2K) = -20I \quad \text{..........................} (C)$$

$$\omega \times (\omega \times \rho) = -2K \times [-2K \times (-2J + 2K)] = 8J \quad \text{..........} (D)$$

Cálculo de la aceleración de Coriolis.

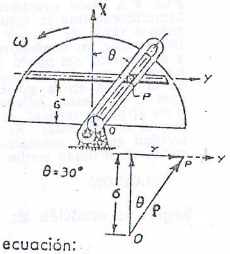
$$2\omega \times \dot{\rho} = 2(-2K) \times 6I = -24J \quad \text{..................................} (E)$$

Sustituyendo las ecuaciones A, B, C, D y E en I se obtiene:

$$a_c = 10I - 10J \quad \text{pies/Seg2.}$$

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} \longrightarrow a_c = 10\sqrt{2} \quad \text{pies/Seg2.}$$

104.—El disco semicircular ranurado rota en sentido antihorario con velocidad angular constante $\omega = 3$ rad./Seg. Simultáneamente el brazo OC también ranurado oscila en torno a la línea OB (Fija al disco), tal que θ varía a razón constante de 2 rad./Seg., excepto en los extremos de la oscilación en el cual invierte el sentido. Determinar la aceleración total del Pin P cuando $\theta = 30°$ y $\dot{\theta}$ es positiva (Sentido horario).



SOLUCION:

La aceleración de P está definida por la ecuación:

$$a_p = a_o + a_{p/o} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times V_r$$

$$a_p = \ddot{r}_o + \ddot{\rho} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times \dot{\rho} \quad \text{.............. [I]}$$

Según el enunciado : { Ver diagrama }

$Y = 6\,\text{tg.}\theta = 6\,\text{tg.}\,30° = 2\sqrt{3}$ Pulg. $\quad \ddot{r}_o = \bar{0}$ [O punto fijo] (A)

El vector posición de P es:

$$\rho = X\imath + Y\jmath = 6\imath + 6\,\text{tg.}\theta\,\jmath = 6\imath + 2\sqrt{3}\,\jmath$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\rho} = \bar{0} + 6\dot{\theta}\,\text{Sec.}^2\theta\,\jmath = 6(2)(2/\sqrt{3})^2\jmath = 16\jmath \quad \text{Pulg./Seg}$$

$$\ddot{\rho} = 12\dot{\theta}^2\,\text{Sec.}^2\theta.\text{tg.}\theta\,\jmath \quad \{\text{ Siendo } \dot{\theta} \text{ Constante }\}$$

$$\ddot{\rho} = 12(2)^2(2/\sqrt{3})^2(1/\sqrt{3})\,\jmath = 64/\sqrt{3}\,\jmath \quad \text{Pulg./Seg2.} \quad \text{..................... (B)}$$

$$\dot{\omega} \times \rho = \bar{0} \quad [\omega = \text{Constante}] \quad \text{..................................... (C)}$$

$$\omega \times (\omega \times \rho) = (-3K) \times [-3K \times (6\imath + 2\sqrt{3}\,\jmath)] =$$

$$-(54\imath + 18\sqrt{3}\,\jmath) \quad \text{(D)}$$

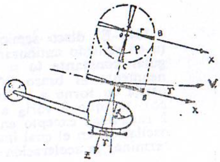
$$2\omega \times \dot{\rho} = 2(-3K) \times 16\jmath = 96\imath \quad \text{Pulg./Seg2.} \quad \text{......................... (E)}$$

Sustituyendo las ecuaciones A, B, C, D y E en I se obtiene:

$$a_p = 64/\sqrt{3}\,\jmath - 54\imath - 18\sqrt{3}\,\jmath + 96\imath = 42\imath + 10/\sqrt{3}\,\jmath$$

$$a_p = \sqrt{(42)^2 + (10/\sqrt{3})^2} \longrightarrow a_p = 42.4 \text{ Pulg./Seg2.} \quad \text{Resp.}$$

110.—Un helicóptero vuela con velocidad horizontal Vo con el eje de su rotor inclinado un ángulo γ respecto al eje Z como se observa en el gráfico, y se prepara para un ascenso vertical disminuyendo el ángulo γ a razón constante de ω rad./Seg. Simultáneamente la velocidad de O disminuye a razón de a_o por unidad de tiempo. Determinar las expresiones de la velocidad y aceleración del punto B situado en el extremo de una de las palas cuando esta cruza el eje X en la posición indicada. Los ejes x, y z, están adheridos al helicóptero y en el plano vertical, coincidiendo el eje z con el eje del rotor. El rotor rota con velocidad angular constante p en sentido horario, visto desde arriba.



SOLUCION:

Según la ecuación de velocidades relativas:

$$V_B = V_o + V_{B/o} + V_r \qquad \text{[I]}$$

Del diagrama se deduce:

$$V_o = V_o\,(\text{Cos. } \gamma\, I - \text{Sen. } \gamma\, K)$$
$$V_{B/o} = P \times r = -PK \times rI = -PrJ$$
$$V_r = \omega J \times rI = -\omega r K$$

Reemplazando los valores hallados en la ecuación I y simplificando:

$$V_B = V_o \text{ Cos. } \gamma\, I - rPJ - [V_o . \text{Sen}\,\gamma + r\omega]K$$

Según la ecuación de aceleraciones relativas:

$$a_B = a_o + a_{B/o} + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + 2\omega \times \dot{\rho}_r \qquad \text{[II]}$$

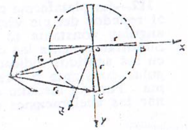
Cuyos valores individuales son:

$$a_o = a_o\,[\text{Sen}\,\gamma K - \text{Cos}\,\gamma I]$$
$$a_{B/o} = P \times (P \times r) = -PK \times (-PrJ) = -P^2 r I$$
$$\omega \times (\omega \times \rho) = \omega J \times (\omega J \times rI) = -\omega^2 r I$$
$$2\omega \times \dot{\rho}_r = 2\omega J \times (-PrJ) = 0$$

Sustituyendo los valores deducidos y simplificando se obtiene:

$$a_B = -(a_o \text{ Cos. } \gamma + r\omega^2 + rP^2)I + a_o \text{ Sen}\,\gamma K \qquad \text{Resp.}$$

111.—Para las condiciones del problema anterior, determinar la aceleración del punto C situado en el extremo de la pala del helicóptero mostrado.



SOLUCION:

Según la ecuación de velocidades relativas:

[I] $\quad V_c = V_o + V_{c/o} + V_r$

Donde:

$$V_o = V_o\,(\text{Cos. }\gamma\, i - \text{Sen. }\gamma\, K) \qquad \text{[A]}$$

$$V_{c/o} = P \times r = PK \times rJ = -Pr\, i \qquad \text{[B]}$$

$$V_r = \omega \times r = \omega J \times rJ = 0 \qquad \text{[C]}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación I:

$$V_C = (V_0 \text{Cos.}\gamma - Pr)\, i - V_o \text{ Sen. }\gamma\, K \qquad \text{Resp.}$$

Según la ecuación de aceleraciones relativas:

[II] $\quad a_c = a_o + a_{c/o} + a_r + a_{cor}$

Donde:

$$a_o = a_o(\text{Sen.}\gamma\, K - \text{Cos. }\gamma\, i) \qquad \text{[D]}$$

$$a_{c/o} = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) = \bar{0} \qquad \text{[E]}$$

Puesto que:

$$\omega \times (\omega \times r) = \omega J \times (\omega J \times rJ) = 0$$

$\omega =$ constante. $\longrightarrow \dot{\omega} = 0$

$P =$ constante. $\longrightarrow \dot{P} = 0$

$$a_r = \dot{P} \times r + P \times (P \times r) = 0 + PK \times (PK \times rJ) = -P^2 r J \qquad \text{[F]}$$

$$a_{cor} = 2\omega \times V_{c/o} = 2\omega J \times (-Pr\, i) = 2\omega r PK \qquad \text{[G]}$$

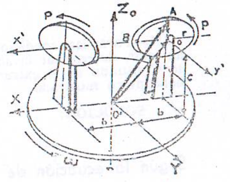
Reemplazando las ecuaciones D, E, F y G en II se obtiene:

$$a_c = a_0(\text{Sen.}\gamma\, K - \text{Cos.}\gamma\, i) - P^2 r J + 2\omega r PK$$

Por tanto:

$$a_c = -a_0 \text{Cos}\gamma\, i - rP^2 J + (a_0 \text{Sen}\gamma + 2\omega P r)\, K \qquad \text{Resp.}$$

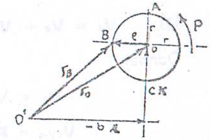
Fig. I



112.—La plataforma circular mostrada rota al rededor del eje vertical Z_o con velocidad angular constante ω en sentido indicado. Simultáneamente los discos pequeños rotan en los sentidos indicados con velocidad angular constante p, respecto a la plataforma. Para el instante representado determinar las aceleraciones de los puntos A y B.

SOLUCION:

Fig. II



La aceleración absoluta de A está definida por la ecuación: [Fig. I]

$$\mathfrak{a}_A = \ddot{r}_0 + \ddot{\rho}_r + \dot{\omega} \times \rho_r + \omega \times (\omega \times \rho_r) + 2\omega \times \dot{\rho}_r \qquad [A]$$

El movimiento absoluto del sistema de coordenadas móviles está regido por las ecuaciones:

$$r_0 = -b\lambda + CK \qquad ; \ \omega = \omega K$$

$$\dot{r}_0 = \omega \times r_0 = \omega K \times (-b\lambda + CK) = -b\omega J \qquad ; \ \dot{\omega} = 0K \qquad [I]$$

$$\ddot{r}_0 = \omega \times (\omega \times r_0) + \dot{\omega} \times r_0 = \omega K \times (-b\omega J) + \bar{0} = b\omega^2 \lambda \qquad [II]$$

El movimiento relativo de A respecto al sistema de coordenadas móviles está regido por las ecuaciones:

$$\rho = rK \qquad ; \ P = PJ$$

$$\dot{\rho}_r = P \times \rho = PJ \times rK = rP\lambda \qquad ; \ \dot{P} = 0J$$

$$\ddot{\rho}_r = P \times (P \times \rho) + \dot{P} \times \rho = PJ \times (rP\lambda) + \bar{0} = -rP^2 K \qquad [III]$$

En consecuencia:

$$\omega \times (\omega \times \rho_r) = \omega K \times (\omega K \times rK) = \bar{0} \text{ ------------------ } [IV]$$

$$2\omega \times \dot{\rho}_r = 2\omega K \times (rP\lambda) = 2rP\omega J \text{ ------------------ } [V]$$

Sustituyendo en A, las ecuaciones I, II, III, IV y V se obtiene:

$$\mathfrak{a}_A = b\omega^2\lambda + 2rP\omega J - rP^2 K$$

Resp.

Para hallar la aceleración absoluta de B se sigue el mismo procedimiento anterior. Si tomamos como punto base el mismo (O), la única variante será la dirección del vector posición relativo ρ
Por lo tanto: [Fig. II]

$$\rho = r\lambda$$

$$\dot{\rho}_r = P \times r = PJ \times r\lambda = -rPK$$

$$\ddot{\rho}_r = P \times (P \times \rho) = PJ \times (-rPK) = -rP^2\lambda \quad \text{[VI]}$$

$$\omega \times (\omega \times \rho) = \omega K \times (\omega K \times r\lambda) = -r\omega^2\lambda \quad \text{[VII]}$$

$$2\omega \times \dot{\rho}_r = 2\omega K \times (-rPK) = \overline{0} \quad \text{[VIII]}$$

Sustituyendo en A , las ecuaciones I, II, VI, VII y VIII se deduce:

$$a_B = b\omega^2\lambda - rP^2\lambda - r\omega^2\lambda$$

$$a_B = \left[(b - r)\omega^2 - rP^2\right]\lambda \quad \text{Resp.}$$

OBSERVACION IMPORTANTE :

En el problema anterior se ha usado la ecuación (A) expresada a partir de las derivadas del vector posición absoluto $\mathbf{r}_o$, y del vector relativo ρ ; indicándose claramente el procedimiento seguido para llegar a los términos de la ecuación de la aceleración relativa **en Traslación y Rotación**.

Tal como se ha explicado anteriormente dicha ecuación tiene el mismo significado que la usada en el problema siguiente (115), en la cual se indican los términos directamente.

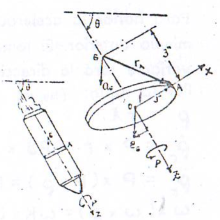
Es recomendable poder analizar un problema de este tipo por ambas formas puesto que cada uno de ellos tienen sus ventajas, en el logro de abreviar procedimientos

a) Denomínase movimiento ABSOLUTO, cuando está referido respecto a un sistema FIJO de coordenadas.

b) Denomínase movimiento RELATIVO, cuando está referido respecto a un sistema de coordenadas móviles o, a un punto de referencia en movimiento.

c) Aceleración de Coriolis, Efecto de la influencia recíproca entre la velocidad angular del sistema móvil y la velocidad [G. Coriolis (1792-1843), ingeniero francés]

115.—En la cúspide de su trayectoria vertical, un cohete realiza una rápida maniobra angular a fin de orientar su proa hacia abajo para retornar a la Tierra. Cuando $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad./Seg., $\ddot{\theta}$ es despreciable y la aceleración del centro de masa G es de 30 pies/Seg²., dirigida hacia abajo. Para este instante determinar la aceleración del punto A situado en la parte superior de la periferia de un disco de 6 pulg de diámetro, que rota alrededor del eje del cohete con velocidad angular constante p = 10 rad./Sg. relativa al cohete, el cual no tiene rotación propia alrededor de su eje. Los ejes x, z, están en el plano vertical y adheridos al cohete.



SOLUCION:

La expresión de la aceleración se define por la ecuación:

$$a_A = a_G + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + a_r + a_C \quad \text{..............} \quad [I]$$

Donde: a_G = Aceleración absoluta del sistema de coordenadas móviles.

$$a_G = a_G\, e_G = 30\ (\text{Sen } 60 K - \text{Cos. } 60 I) = -15 I + 15\sqrt{3}\, K \quad [A]$$

$$\dot{\omega} \times r = 0 \quad \text{Puesto que } \ddot{\theta} = 0 \text{ (Condición del problema)} \quad [B]$$

Del gráfico se deduce:

$$\omega = -\dot{\theta} J = -2J \quad \text{rad./Seg}$$

$$r = GA = (3/12)\ I + 3K \quad \text{pies}$$

$$V_r = P \times OA \ [\text{Velocidad relativa de A respecto a O}]$$

$$V_r = 10K \times \left(\frac{3}{12} I\right) = 2.5 J \quad \text{pies/Seg.}$$

Por lo tanto:

$$\omega \times (\omega \times r) = -2J \times \left[(-2J) \times \left(\frac{1}{4} I + 3K\right)\right] = -I - 12K \quad \text{pies/Seg2.} \quad [C]$$

$$a_C = 2\omega \times V_r = 2(-2J) \times (2.5J) = 0 \quad \text{..................} \quad [D]$$

$$a_r = \dot{V}_r \quad [\text{Aceleración relativa de A respecto a O}]$$

Considerando además que: P = Constante $\longrightarrow$ $\dot{P} = 0$

$P \perp OA$

se afirma:

$$a_r = \dot{P} \times OA + P \times (P \times OA) = \bar{0} - P^2 . OA = -(10^2)\left(\frac{1}{4}\right) I$$

$$= -25 I \quad \text{pies/Seg2.} \text{-----------} \quad [E]$$

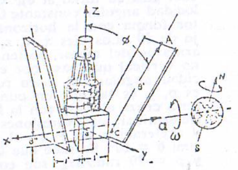
Reemplazando las ecuaciones A, B, C D y E en [I] se obtiene:

$$a_A = -15 I + 15\sqrt{3}\, K - I - 12K - 25 I$$

$$a_A = -41 I + 13.98\ K \quad \text{pies/Seg2.}$$

Resp.

117.—Los ejes x, y, z, están adheridos a la estación espacial mostrada, la cual gira alrededor del eje x con velocidad angular constante $\omega = 2$ rad./Seg. Calcular la aceleración de A situado en el extremo del panel solar en la posición $\varnothing = 30°$, si los paneles están desplegándose a razón de $\dot{\phi} = 4$ rad./Seg., $\ddot{\varnothing} = 6$ rad./Seg.^{2} y el eje x pasa por el centro de la Tierra que se considera fijo en el espacio. El centro de masa G de la estación espacial tiene una aceleración de 25 pies/Seg.^{2} dirigida hacia el centro de la Tierra. Las uniones articuladas B y C están separadas 2 pies entre si y 8 Pulg. debajo de G.



SOLUCION:

La ecuación de la aceleración absoluta de A está definida por:

$$a_A = a_G + \alpha \times GA + \omega \times [\omega \times GA] + a_r + 2\omega \times V_r \text{ ---} \quad [I]$$

Analizando el gráfico se deduce:

$$a_G = -25\,i \ \text{pies/Seg2.} \ \text{-----------------------------} \quad (A)$$

$$\alpha \times GA = \overline{0} \longleftarrow \{\text{Puesto que } \omega = \text{Constante}\} \text{ ---} \quad (B)$$

$$GA = -\frac{8}{12}K - i + 8[\ \text{Cos. } 30°K - \text{Sen. } 30\, i]$$

$$GA = 6.25K - 5i$$

$$\omega \times [\omega \times GA] = 2i \times [2i \times (6.25K - 5i)]$$

$$\omega \times [\omega \times GA] = -25K \text{ -----------------------------} \quad (C)$$

$$a_r = \ddot{\phi} \times CA + \dot{\phi} \times [\dot{\phi} \times CA]$$

$$a_r = -6J \times 8(\text{ Cos. } 30K - \text{ Sen. } 30i) -$$

$$[4]^2\, 8(\text{ Cos. } 30K - \text{ Sen. } 30i)$$

$$a_r = 22.40\,i - 135K \text{ -----------------------------} \quad (D)$$

$$2\omega \times V_r = 2\omega i \times [\ \dot{\phi} \times CA]$$

$$= 4i \times [-4J \times 8(\text{ Cos. } 30K - \text{ Sen. } 30\,i)]$$

$$2\omega \times V_r = 64J \text{ -----------------------------} \quad (E)$$

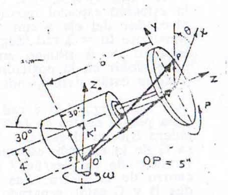
Reemplazando las ecuaciones A, B, C, D y E en I:

$$a_A = [22.40 - 25]\,i + [64]J - [25 + 135]K$$

Luego:

$$a_A = -2.6\,i + 64J - 160K \ \text{pies/Seg2.} \ \text{-----------} \quad \text{Resp.}$$

119.—El motor eléctrico con el disco acoplado están montados sobre la base S, la cual gira en torno al eje vertical Z_o con velocidad angular constante ω. El eje del motor forma con la horizontal un ángulo fijo de 30°. Los ejes x, y, z, están ligados al armazón del motor, perteneciendo (y) al plano vertical que pasa por el eje z. La velocidad angular del disco relativa a x, y, z, es p, y es tal que un punto P de su periferia cruza el eje (y) con la frecuencia $p/2\pi$. Determinar las expresiones de la velocidad y aceleración de P en el instante para el cual $\theta = 60°$. Se sabe que $\omega = 10$ rad./Seg. y $p = 20$ rad./Seg. son constantes.



SOLUCION:

La velocidad de P está definida por la ecuación :

$$V_p = V_o + V_{p/o} + V_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

Por consideración del problema y según el gráfico se deduce :

$$V_o = \omega K' \times O'O$$

Siendo K' vector unitario en dirección del eje Z.

Luego:

$$K' = \text{Cos. } 30° J + \text{Sen. } 30° K = \frac{\sqrt{3}}{2} J + \frac{1}{2} K$$

$$V_o = 10\left[\frac{\sqrt{3}}{2} J + \frac{1}{2} K\right] \times (4J + 6K) = (30\sqrt{3} - 20)\,i \quad (A)$$

$$V_r = P \times OP = 20K \times 5(\text{ Cos. } 60°\,i + \text{Sen. } 60°\,J) =$$

$$= 50J - 50\sqrt{3}\,i \quad (B)$$

$$V_{p/o} = \omega \times OP = 10\left[\frac{\sqrt{3}}{2} J + \frac{1}{2} K\right] \times 5(\text{ Cos. } 60°\,i + \text{Sen. } 60° J) =$$

$$= 12.5\,J - 12.5\sqrt{3}\,i - 12.5\sqrt{3}\,K \quad (C)$$

Sustituyendo las ecuaciones A, B y C en I se obtiene :

$$V_p = (30\sqrt{3} - 20 - 50\sqrt{3} - 12.5\sqrt{3})\,i + (50 + 12.5)J - 12.5\sqrt{3}K$$

$$V_p = -76.3\,i + 62.5J - 21.7K \text{ Pulg./Seg}$$

Resp.

La aceleración de P está definida por la ecuación:

$$a_p = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \ddot{r} + 2\omega \times V_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad [II]$$

Donde:

$$a_o = \dot{\omega} \times O'O + \omega \times (\omega \times O'O)$$

$$= \bar{0} + 10K' \times [10K' \times (4J + 6K)]$$

$$a_o = 5(K+\sqrt{3}J) \times 10(3\sqrt{3}-2)\imath = (150\sqrt{3}-100)J - 276.79K \quad (1)$$

$$\omega \times (\omega \times r) = 5(K+\sqrt{3}J) \times 5\left[(K+\sqrt{3}J) \times \left(\frac{5}{2}\imath + \frac{5\sqrt{3}}{2}J\right)\right]$$

$$= 62.5(-4\imath - \sqrt{3}J + 3K) \quad (2)$$

$$\dot{\omega} \times r = \bar{0} \qquad \{\omega = \text{constante.}\} \quad (3)$$

$$\ddot{r} = \dot{P} \times r + P \times (P \times r) =$$

$$\bar{0} + 20K \times \left[20K \times \left(\frac{5}{2}\imath + \frac{5\sqrt{3}}{2}J\right)\right] = -1{,}000(\imath + \sqrt{3}J) \quad (4)$$

$$2\omega \times V_r = 2(5)(K+\sqrt{3}J) \times 50(J - \sqrt{3}\imath) = -500(\imath + \sqrt{3}J - 3K) \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1) (2) (3) (4) (5) en [II]

$$a_p = -(62.5 \times 4 + 1{,}500)\imath + (150\sqrt{3} - 100 - 62.5\sqrt{3} - 1{,}500\sqrt{3})J + (100\sqrt{3} - 450 + 187.5 + 1{,}500)K$$

Simplificando:

$$a_p = -1{,}750\,\imath - 2{,}550J + 1{,}410K \quad \text{Pulg./Seg2.}$$

Resp.

CINETICA DE UNA PARTICULA

Segunda Ley de Newton : "La variación respecto al tiempo de la cantidad del movimiento es igual a la fuerza que produce, efectuándose las variaciones en la dirección en el cual actúa dicha fuerza."

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{F_A} = m\mathbf{a_A}$$

Donde $\mathbf{F_A}$ y $\mathbf{a_A}$ son **resultantes**. En la solución de muchos problemas es preferible expresar la ecuación del movimiento de cada una de las componentes. **Ejemplos:**

En coord. Rectangulares:	$F = m\ddot{X}$;	$F = m\ddot{Y}$;	$F = m\ddot{Z}$
En coord. Cilíndricas:	$F = m a_r$;	$F = m a_\theta$;	$F = m\ddot{Z}$
En coord. Esféricas:	$F = m a_r$;	$F = m a_\theta$;	$F = m a_\phi$
En coord. Tang. y Normal:	$F = m a_t$;	$F = m a_n$;	Etc.

Fuerzas Gravitacionales :

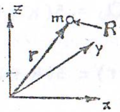
Despreciando la resistencia del aire:

$$\Sigma F = m.a \quad \begin{cases} F_x = 0 \longrightarrow 0 = m\,a_x \longrightarrow a_x = 0 \\ F_y = -mg \longrightarrow -mg = m\,a_y \longrightarrow a_y = -g \end{cases}$$

Principio de D'Alambert: La ecuación de la suma de fuerzas de inercia (fuerzas efectivas opuestas al movimiento) y las fuerzas reales aplicadas es igual a cero

$$\Sigma F_{\text{inercia}} - \Sigma F_{\text{reales}} = 0 \qquad [\textbf{Equilibrio Dinámico}]$$

125.—El vector posición de una partícula de 1.61 Lb. está definido por: $r = 3t\,i + 4t^2 J - 0.5t^4K$, donde t se mide en segundos y r en pies. Calcule la fuerza resultante R sobre la partícula para el instante t = 4 Seg.



SOLUCION:

La ecuación del movimiento de la partícula será:

$$\Sigma F = m.a \longrightarrow R = m\ddot{r} \quad \text{..........................} \quad (1)$$

Según se afirma:

$$r = 3t^3 i + 4t^2 j - \frac{1}{2} t^4 K$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{r} = 9t^2 i + 8t j - 2t^3 K$$
$$\ddot{r} = 18t i + 8 j - 6t^2 K$$

Para la condición t = 2 Seg. se deduce:

$$\ddot{r} = 4\left[9i + 2j - 6K\right]$$

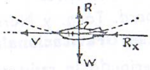
Cuyo módulo es $\ddot{r} = 4\sqrt{81 + 4 + 36}$

$$\ddot{r} = 44 \text{ pies/Seg2.} \quad \text{..........................} \quad (2)$$

Reemplazando (2) y el valor numérico de m en la ecuación (1) se obtiene finalmente:

$$R = \left[\frac{1.61}{32.2}\right] 44 \longrightarrow R = 2.07 \text{ Lb.} \qquad \textbf{Resp.}$$

126.—En el punto más bajo de un riso vertical un cierto avión de 60,000 Lb. de peso, tiene una aceleración vertical de 3g y una velocidad de 600 millas/Hr. Hallar la componente vertical R de la fuerza que ejerce el aire sobre el avión.



SOLUCION:

La ecuación del movimiento en dicha dirección (y) será:

$$\Sigma F_y = m.a_y$$

Observando el gráfico se deduce:

$$R - W = m\,a_y \text{, donde: } m = \frac{W}{g}$$

$$a_y = 3g$$

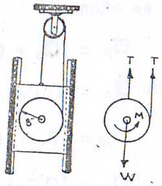
Luego:

$$R = W + \frac{W}{g}(3g) = 4W \text{ Lb.}$$

Reemplazando el valor numérico de W :

$$R' = 4(60{,}000) \longrightarrow R = 240{,}000 \text{ Lb.}$$ Resp.

129.—Un ascensor de 2,000 Lb. funciona por acción del torno A, en el cual se arrolla el cable elevador. Calcular el torque constante M que proporciona el motor montado en el ascensor, al eje del torno; tal que en un ascenso vertical de 10 pies desde el reposo alcance la velocidad de 10 pies/Seg. La masa del torno es pequeña y debe tratarse como si estuviera en equilibrio rotatorio. La fricción en las guías verticales es despreciable.



SOLUCION:

Aplicando la ecuación del movimiento según diagrama de cuerpo libre:

$$\Sigma F_y = m.a_y \longrightarrow 2T - W = m.a_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

El ascenso está regido por la ecuación:

$$V.dV = a_y\,dY \longrightarrow \int_0^8 V.dV = a_y \int_0^{10} dS$$

Luego.

$$8^2 = 2a_y(10) \longrightarrow a_y = 3.2 \text{ pies/Seg2.} \quad [II]$$

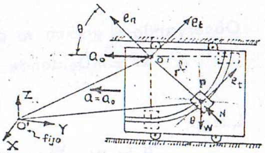
Sustituyendo la ecuación [II] en [I] y considerando que: $m = w/g$

$$2T = (2{,}000/32.2)\,3.2 + 2{,}000 \longrightarrow T = 1{,}100 \text{ Lb.}$$

Por condición de equilibrio rotativo:

$$\Sigma M_o = Td \longrightarrow M = 1{,}100(8/12) \longrightarrow M = 733.3 \text{ Lb. pies}$$ Resp.

130.—El collar P de peso W resbala libremente sin rozamiento apreciable en la guía circular contenida en el plano vertical y montada en el cuerpo móvil F. Calcular la aceleración horizontal indicada en la figura, que debe tener la estructura para mantener el collar en la posición fija β



SOLUCION:

Por condiciones del problema :

$$\theta = \text{constante} \longrightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

$$r = \text{constante.} \longrightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

Considerando O como base del sistema de coordenadas móviles se afirma :

$$a_p = a_o + a_{p/o}$$

donde $a_o = a(\text{Cos.}\,\theta e_n - \text{Sen}\,\theta e_t)$

$$a_{p/o} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta = 0$$

Luego: $a_p = [a\,\text{Cos.}\,\theta]\,e_n - [a\,\text{Sen.}\,\theta]\,e_t = a_n + a_t$

Aplicando las ecuaciones del movimiento se obtiene:

{Ver diagrama}

$$\Sigma F_n = m a_n \longrightarrow N - W\,\text{Sen}\,\theta = m a_n = m[a\,\text{Cos.}\,\theta] \quad (I)$$

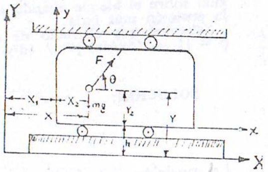
$$\Sigma F_t = m a_t \longrightarrow -W\,\text{Cos.}\,\theta = m a_t = m[-a\,\text{Sen.}\,\theta] \quad (II)$$

De la ecuación II : $a = \frac{W}{m}\cdot\text{Cotg.}\,\theta \longrightarrow a = g\ \text{Cotg.}\,\theta$ Resp.

De la ecuación I : $N = m(g\text{Cotg.}\theta)\,\text{Cos.}\,\theta + W\,\text{Sen.}\,\theta$

Resp. $N = mg\left(\frac{\text{Cos.}^2\theta}{\text{Sen.}\,\theta} + \text{Sen.}\,\theta\right) \longrightarrow N = \frac{mg}{\text{Sen.}\,\theta}$

131.—El vagón mostrado está oscilando horizontalmente de acuerdo a la función $x = So + A.Sen.\omega t$, donde So, A y ω son constantes. Una fuerza F de 8 Lb. de tensión soporta la esferilla de 1 Lb. Seg.²/pie de masa tal como se indica. Si para el instante representado se sabe que $\theta = 30°$ $A = 2\pi/Sen.\omega t$, determinar para este instante la aceleración relativa de la esferilla respecto al sistema de coordenadas móviles x, y, z, si $\omega = 0.2$ rad./Seg.



SOLUCION:

El movimiento de m respecto al sistema fijo XY está dado por:

$$\Sigma F = m.a \longrightarrow F_x = m.\ddot{X} \quad ; \quad F_y - mg = m\ddot{y} \text{ .... (I)}$$

Observando el gráfico y según datos se obtiene:

$$X = X_1 + X_2 = S_o + A\ Sen.\omega t + X_2 \quad ; \quad Y = h + Y_2$$

Diferenciando respecto al tiempo:

$$\dot{X} = A\omega\ Cos.\omega t + \dot{X}_2 \qquad \dot{Y} = 0 + \dot{Y}_2$$

$$\ddot{X} = -A\omega^2\ Sen.\omega t + \ddot{X}_2 \qquad \ddot{Y} = \ddot{Y}_2 \text{ .... (II)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (II) en (I) y ordenando:

$$\ddot{X}_2 = F_x/m + A\omega^2\ Sen.\omega t \qquad \ddot{Y}_2 = F_y/m - g \text{ (III)}$$

Además por condiciones del problema:

$$F_x = F\ Cos.30 = 8(\sqrt{3}/2) = 4\sqrt{3} \text{ Lb.} \qquad \omega = 0.2 \text{ rad./Seg}$$

$$F_y = F\ Sen.30 = 8(1/2) = 4 \text{ Lb.} \qquad m = 1 \text{ Lb. Seg2/pie}$$

$$A = 2\pi/Sen.\omega t$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (III)

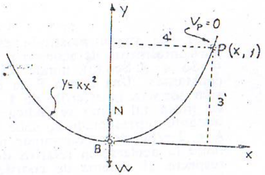
$$\ddot{X}_2 = 4\sqrt{3} + 2\pi(0.2)^2 = 7.171 \longleftrightarrow ; \ddot{Y}_2 = 4 - 32.2 = -28.2 \ \frac{\text{pies}}{\text{Seg2.}}$$

La aceleración de m relativa al sistema de coordenadas móviles x y z será:

$$a = \sqrt{[\ddot{X}_2]^2 + [\ddot{Y}_2]^2} = \sqrt{(7.171)^2 + (28.2)^2} \longrightarrow a = 29.10 \ \frac{\text{pies}}{\text{Seg2.}}$$

133.—Un bloque pequeño de 2 Lb. se suelta desde el reposo en A, resbalando hacia abajo sobre la guía parabólica mostrada. Calcular la fuerza normal N que ejerce la guía sobre el bloque cuando este pasa por la posición más baja.

Sabemos que el radio de curvatura es $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2)$.



SOLUCION:

La posición más baja será el vértice (Punto B) de la parábola. por tanto aplicando la ecuación del movimiento en dicho punto se obtiene:

$$\left[\Sigma F_y = m.a_y\right] \therefore N - W = \frac{W}{g}\cdot\frac{V_B^2}{\rho} \longrightarrow N = W\left(1 + \frac{V_B^2}{g\rho}\right) \text{..... (I)}$$

Cálculo de ρ (Radio de curvatura de la parábola en el punto B):

La ecuación de la parábola es $y = KX^2$ -------------------- (II)

Para las condiciones iniciales: $3 = K(4)^2 \longrightarrow K = 3/16$

Derivando respecto a X la ecuación II:

$$\frac{dy}{dx} = 2KX = \frac{3}{8}X \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2K = 3/8$$

Cuando pasa por B : $[X = 0] \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2KX = 0$

Por tanto: $$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{(d^2y/dx^2)} = \frac{1}{3/8} \longrightarrow \rho = \frac{8}{3} \text{ pies ----(III)}$$

Además por conservación de la energía se afirma:

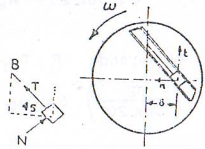
$$E._{\text{cinética}} = E._{\text{potencial}}$$

$$\frac{1}{2}m\left[V_B^2 - 0\right] = mgh \longrightarrow V_B^2 = 2g(3) \longrightarrow V_B^2 = 6g \text{ ---- (IV)}$$

Sustituyendo las ecuaciones III y IV en I se obtiene:

$$N = 2\left(1 + \frac{6g}{8g/3}\right) \longrightarrow N = 6.5 \text{ Lb.}$$ Resp.

135.—La muesca A de 2 Lb. de peso puede deslizar sin dificultad en la ranura lisa del disco mostrado, el cual rota en un plano horizontal al rededor de su centro O con velocidad angular constante $\omega = 40$ rad./Seg. Si la muesca se mantiene en la posición indicada por acción de un cordel sujeto en B; calcular la tensión T de dicho cordel para las condiciones especificadas.



SOLUCION:

Aplicando la ecuación del movimiento en la dirección normal se obtiene:

$$(\Sigma F)_n = m.a_n = m.\ \omega^2 .r = \frac{2}{32.2}(40)^2\left(\frac{6}{12}\right) = 49.6 \text{ Lb.}$$

$$(\Sigma F)_n = (T - N)\ Cos.\ 45^\circ = (T-N)\sqrt{2}/2$$

$$(T - N)\ \sqrt{2}/2 = 49.6 \longrightarrow T - N = 49.6\,(\sqrt{2}) \qquad [I]$$

Similarmente en la dirección tangencial:

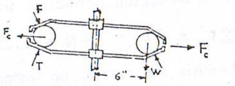
$$(\Sigma F)_t = (T + N)\ Cos.45^\circ = m.a_t = m.\ \alpha\ .r = 0 \qquad [\omega = \text{constante}]$$

$$(T + N)\ \sqrt{2}/2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad N = - T \ \text{----------} \quad [II]$$

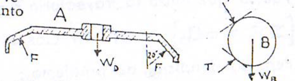
gualando las ecuaciones (I) y (II) se obtiene:

$$T - (-T) = 49.6(\sqrt{2}) \qquad \longrightarrow \qquad T = 35.1 \text{ Lb.} \qquad \text{Resp.}$$

137.—El espacio vertical entre los dos discos rotatorios mostrados en sección, está controlado por la acción centrífuga de las dos bolas cada una de peso 4 Lb. Si el disco superior que puede deslizar libremente sobre el eje vertical Z_o pesa 8 Lb., calcular la velocidad angular N que necesita el conjunto para mantener el espacio mostrado.



SOLUCION:



La fuerza centrífuga producto de la rotación mantiene las esferas en equilibrio dinámico en dirección horizontal. Por tanto:

$$\Sigma F_r = m.a_c$$

$$(F + T)\ Sen.\ 20 = \frac{W_B}{g} N^2 r \quad , \quad \text{donde}: \ a_c = N^2 r \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [I]$$

Verticalmente el sistema está en equilibrio estático. En consecuencia:

Del diagrama A: $\qquad [\Sigma F_y = 0]$

$$2F\ Cos.20^\circ - W_D = 0 \longrightarrow F = W_D/2\ Cos.\ 20^\circ = 8/2\ Cos.20^\circ = 4/\ Cos.20^\circ$$

Del diagrama B: $[\Sigma F_y = 0]$

$(T - F)\,Cos.20 - W_B = 0 \longrightarrow T = F + W_B/Cos.20° = 4/Cos.20°$

$+ 4/Cos.20° = 8/Cos.20°$

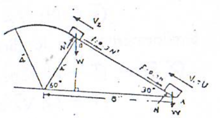
Sustituyendo F, T y valores numéricos en la ecuación [I]

$$\left(\frac{12}{Cos.20°}\right) Sen.20 = \left(\frac{4}{32.2}\right)\left(\frac{6}{12}\right) N^2 \longrightarrow N = \sqrt{193.2\ tg.20°} =$$

$= 8.3865$ rad./Seg

Multiplicando por el factor $(60/2\pi)$ $\longrightarrow \boxed{N = 80.1\ R.P.M.}$

139.—Un objeto de peso W es lanzado desde el punto A con velocidad inicial U sobre la superficie inclinada en el sentido indicado. Un instante después de pasar por el punto B, la fuerza normal entre dicho objeto y la superficie de contacto se reduce al 50% del valor que tenía un instante antes de llegar a B. Determinar la velocidad U si el coeficiente de fricción entre ambas superficies es 0.3.



SOLUCION:

Análisis del cuerpo en el instante que parte del punto A:
En la dirección normal el sistema está en equilibrio. Por tanto:

$[\Sigma F_n = 0]$ $\quad -N + W.Cos.30° = 0 \longrightarrow N = W\sqrt{3}/2$ ----- [I]

Análisis del cuerpo un instante después de pasar por el punto B:
Puesto que inicia la trayectoria curva tiene eceleración normal. Luego:

$[\Sigma F_n = m\,a_n]$ $\quad -N^1 + W.Cos.30° = mV_B^2/\rho$ donde: $m = W/g$ ---- [II]

Pero por condición del problema: $\quad N^1 = N/2\ ;\ \rho = 4$ pies

y según la ecuación I: $\quad N^1 = W\sqrt{3}/4$

Sustituyendo estos valores en la ecuación II:

$$-\frac{W\sqrt{3}}{4} + \frac{W\sqrt{3}}{2} = \frac{W}{4g}V_B^2 \longrightarrow V_B^2 = g\sqrt{3} \text{ ----- [III]}$$

Considerando III se aplica la ecuación general de la energía entre A y B:

$\Delta U = \Delta T + \Delta V + \Delta Q$ Cuyos valores son: [IV]

Trabajo externo:

$$\Delta U = 0 \qquad \text{(No actúan fuerzas externas)} \text{ ---------- } [1]$$

Energía cinética:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2) = \frac{W}{2g}(g\sqrt{3} - U^2) \text{ --------- } [2]$$

Energía potencial:

$$\Delta V = W.\Delta h = W(4 \text{ Sen. } 60°) = 2\sqrt{3}W \text{ ----------- } [3]$$

Energía calorífica por fricción:

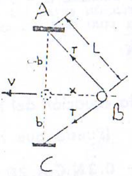
$$\Delta Q = f.\Delta S = 0.3N(8 \text{ Cos. } 30°) =$$

$$0.3(W\sqrt{3}/2)(8\sqrt{3}/2) = 1.8W \quad [4]$$

Sustituyendo las ecuaciones 1, 2, 3 y 4 en IV·

$$0 = W\sqrt{3}/2 - WU^2/2g + 2\sqrt{3}W + 1.8W \longrightarrow U = 19.9 \frac{\text{pies}}{\text{Seg.}}$$

142.—Una partícula de masa m se suelta desde el reposo en la posición indicada, acelerándose hacia la izquierda por acción de la cuerda elástica ABC, cuya longitud indeformada (cuando $x = 0$) se indica con líneas punteadas y está en un plano vertical. Dicha cuerda tiene una constante recuperadora unitaria K, que es la razón de la fuerza de tensión al alargamiento unitario o deformación. Determinar la expresión de la velocidad alcanzada por la partícula en el instante en el cual x se hace cero.



SOLUCION:

La fuerza recuperadora por tensión será: $\qquad T = -K.\Delta L$

Siendo: ΔL = deformación unitaria $= \dfrac{L - b}{b}$

Luego: $\quad T = -\dfrac{K}{b}(L - b) \quad$; Donde: $L = \sqrt{b^2 + X^2} \qquad [I]$

Aplicando la ecuación del movimiento: $\qquad \Sigma F_x = m.a_x$

$$2T.\text{Cos. }\theta = m a_x \longrightarrow a_x = \frac{2T.\text{Cos. }\theta}{m} \qquad [II]$$

Sustituyendo las ecuaciones I y $\text{Cos. }\theta = X/L$ en [II]:

$$a_x = -\frac{2K}{mb}\cdot\frac{X}{\sqrt{b^2+X^2}}(\sqrt{b^2+X^2} - b) = -\frac{2K}{mb}\left(X - \frac{Xb}{\sqrt{b^2+X^2}}\right)$$

Relacionando con la ecuación $V.dV = a_x d_x$ e integrando

$$\int_0^V V dV = -\frac{2K}{mb}\int_X^0 \left(X - \frac{Xb}{\sqrt{b^2+X^2}}\right) dX$$

Efectuando:

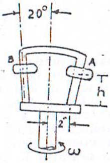
$$\frac{V^2}{2} - 0 = -\frac{2K}{mb}\left|\frac{X^2}{2} - b\sqrt{b^2+X^2}\right|_X^0$$

$$V^2 = \frac{4K}{mb}\left(b^2 + \frac{X^2}{2} - b\sqrt{b^2+X^2}\right)$$

$$V^2 = \frac{2K}{mb}\left(2b^2 - 2b\sqrt{b^2+X^2} + X^2\right) = \frac{2K}{mb}\left(\sqrt{b^2+X^2} - b\right)^2$$

$$V = \left(\sqrt{b^2+X^2} - b\right)\sqrt{\frac{2K}{mb}}$$

143.—Calcular la velocidad angular ω del conjunto mostrado en torno al eje z, que permita mantener los cilindros deslizantes A y B en la posición h = 3 Pulg. El coeficiente de fricción entre los cilindros y la varilla en la cual deslizan es 0.3.



SOLUCION:

Aplicando la ecuación del movimiento en ambas coordenadas:

$\Sigma F_y = 0$ (Puesto que h es constante = 3 Pulg.)

$N.Cos.70 - 0.3N.Cos.20 - W = 0 \longrightarrow Cos.70 - 0.3\ Cos.20 = W/N$ [I]

$\Sigma F_x = ma_x = m.r\omega^2$

siendo: $r = 2 + 3\ Sen.20 = 3.12$ Pulg. {Ver diagrama}

$N\ Sen.70 + 0.3N\ Sen.20 = (W/g)\omega^2 r$

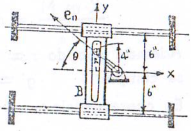
$Sen.70 + 0.3\ Sen.20 = W\omega^2 r/Ng$ ------------------------------ [II]

Dividiendo la ecuación I de II:

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{Sen.70° + 0.3\ Sen.20}{Cos.70° - 0.3\ Cos.20} = \frac{0.94 + 0.1026}{0.342 - 0.282} = 17.37$$

$$\omega^2 = (17.37)g/r = 17.37(32.2 \times 12)/3.12 \longrightarrow \boxed{\omega = 46.4 \text{ rad./Seg}}$$

145.—La guía acanalada mostrada B de peso 8 Lb. oscila horizontalmente por acción del pin A del eslabón OA, siendo despreciable el rozamiento entre dicha guía y los ejes en los cuales se desliza. Si el eslabón OA tiene una velocidad angular de 12 rad./Seg. y una aceleración angular de 20 rad./Seg.² ambas en sentido antihorario en el instante en el cual $\theta = 45°$, calcular para estas condiciones la fuerza F de contacto entre A y el canal de la guía.



SOLUCION:

La aceleración absoluta de A está definida por la ecuación:

$$a_A = a_t + a_n = \alpha \times r - \omega^2 r = \alpha K \times r e_n - \omega^2 r e_n$$

Donde: $e_n = \text{Sen. } 45 J - \text{Cos. } 45 \lambda = \sqrt{2}/2 (J - \lambda)$

$$a_A = 20K \times 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(J - \lambda)\right] - (12)^2(4)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(J - \lambda)\right]$$

$$a_A = 248\sqrt{2}\lambda - 328\sqrt{2} J \longrightarrow a_x = 248\sqrt{2} \text{ Pulg./Seg}^2 \quad [I]$$

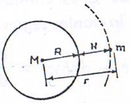
La fuerza que actúa en la cara de la ranura tiene dirección horizontal. Por tanto; según la ecuación del movimiento se afirma:

$$F = m.a_A = \frac{W}{g} a_x \quad \text{Siendo: } g = 32.2 \times 12 \text{ Pulg./Seg2.} \quad W = 8 \text{ Lb.}$$

Sustituyendo la ecuación I y demás valores numericos se deduce:

$$F = \frac{8}{32.2(12)}(248\sqrt{2}) \longrightarrow F = 7.26 \text{ Lb}$$

149.—Demostrar la relación: $K.M = g.R^2$ Siendo K la constante de atracción gravitatoria entre un cuerpo de masa m y la Tierra, (Cuya masa es M, radio R y g la aceleración de la gravedad en su superficie).



SOLUCION:

La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre cualquier cuerpo se define por la ecuación.

$$F_r = \frac{K.m.M}{r^2} \quad \text{----------------------} \quad [I]$$

Siendo: K = Constante gravitatoria.
m = masa del cuerpo.
M = masa de la Tierra.
r = distancia de separación de las masas.

Esta misma fuerza radial ejercida sobre el cuerpo de masa m es:

$$F_r = mg' \quad \text{----------------------} \quad [II]$$

Siendo: g' = Aceleración de la gravedad a cualquier altura H sobre la superficie terrestre.

Igualando (I) y (II):

$$\frac{K\,m\,M}{r^2} = m.g' \longrightarrow KM = g' r^2$$

Además: cuando $r = R$ (radio de la Tierra)

se cumple: $g' = g$ [Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre]

En consecuencia:

$$\longrightarrow KM = g\,R^2 \qquad \text{L. q. q. d.}$$

150.—Si el radio de la Tierra es R y la distancia entre centros de la Tierra y la Luna es L ; determinar la ecuación de la velocidad y también del período de rotación de la Luna respecto a la Tierra suponiéndola fija. La masa de la Tierra es M y de la Luna es m. El valor numérico de L es 12.54(10^8) pies.

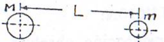


Fig. I

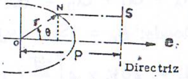


Fig. II

SOLUCION :

La fuerza de atracción gravitatoria $(-KmM/L^2)$ tiene dirección radial, siendo en consecuencia nula su componente transversa (F_θ). Por tanto:

$$\Sigma F_r = m\,a_r \longrightarrow -KmM/L^2 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \text{-----------} \quad [A]$$

$$\Sigma F_\theta = m\,a_\theta \longrightarrow \qquad 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Multiplicando por r:

$$0 = (r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

Integrando se obtiene:

$$c = r^2\hat{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = c/r^2 \quad \text{-------} \quad [B]$$

donde C es constante de integración y $(r = L)$. [Fig. I] ---------------- [C]

Por lo tanto según (B):

$$\dot{r} = dr/dt = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{c}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta} \quad \text{-----------} \quad [D]$$

Y según (B) y (D):

$$\ddot{r} = d\dot{r}/dt = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d}{d\theta}(\dot{r}) = \frac{c}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\frac{c}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right] \quad \text{-----------} \quad [E]$$

Sustituyendo (B), (C) y (E) en la ecuación (A) se obtiene:

$$-KM/r^2 = \left[\frac{c}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{c}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right) - r\left(\frac{c}{r^2}\right)^2\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C\,\frac{d}{d\theta}\left[\frac{c}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right] - \frac{c^2}{r} = -KM$$

Reemplazando: $\left.\begin{array}{l} r = 1/y \\ \dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{d\theta} \end{array}\right\}$ se obtiene: $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = KM/C^2$ [F]

Es una ecuación diferencial de la forma: $y'' + y = Q(y)$, cuya solución conocida es:

$$y = Q(y) + D.\,\text{Cos.}(\theta + \varnothing)$$

Siendo D y $\varnothing$ constantes de integración, pudiéndose eliminar $\varnothing$ cuando $r = (1/y)$ es mínimo. Por tanto según (F):

$$\frac{1}{r} = \frac{KM}{C^2} + D.\,\text{Cos.}\theta \text{ ---------------------------- [G]}$$

Además según el gráfico y definición de Cónica; la ecuación de la excentricidad será: (Fig. II)

$$e = \frac{ON}{NS} = \frac{r}{p - r.\,\text{Cos.}\theta} \longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{ep} + \frac{1}{p}\text{Cos.}\,\theta \quad \text{[H]}$$

Se observa que las ecuaciones (G) y (H) tienen la misma forma. Por tanto comparando sus términos correspondientes se deduce:

$$\frac{KM}{c^2} = \frac{1}{ep} \qquad D = \frac{1}{p}$$

Luego: $e = c^2/kmp \longrightarrow e = \dfrac{DC^2}{KM}$ --------------- [I]

Considerando condiciones iniciales se tendrá; según la ecuación (G):

$$\left.\begin{array}{l} r = L = \text{constante} \\ \theta = 0 \\ \text{Cos.}\,\theta = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow D = \frac{1}{L} - \frac{KM}{C^2} \text{ -------------- [II]}$$

Sustituyendo (II) en (I) y según las ecuaciones (B) y (C):

$$e = \frac{C^2}{KM}\left[\frac{1}{L} - \frac{KM}{C^2}\right] = \frac{(\dot\theta L^2)^2}{KM}\left[\frac{1}{L} - \frac{KM}{(\dot\theta L^2)^2}\right] = \frac{(\dot\theta L)^2 L}{KM} - 1 \quad \text{[III]}$$

Pero; puesto que L = constante y la tierra se supone fija se afirma:

$e = 0$

$V = \dot\theta L$

Sustituyendo en (III) se deduce: $\longrightarrow$ $V^2 = KM/L$

Además; $KM = gR^2$ [PROBLEMA ANTERIOR] $\longrightarrow$ $\boxed{V = R\sqrt{g/L}}$ [IV]

Cálculo del periodo

"El **periodo** T de una órbita es la razón entre el área total de la órbita (A) y la velocidad areolar constante $\dot{A}$ con que se barre dicha área. O sea·

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi r^2}{\dot{\theta} r^2/2} = \frac{\text{área de la órbita circular}}{\text{Velocidad areolar (Prob. 42)}}$$

Por lo tanto $$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{(v/r)} = \frac{2\pi r}{V} \quad \text{-------------------- [V]}$$

Sustituyendo (C) y (IV) en la ecuación (V) se obtiene:

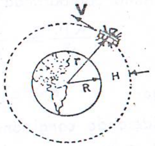
$$T = \frac{2\pi L}{R}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Resp.

OBSERVACION IMPORTANTE.-

El desarrollo del problema es bastante explicativo considerando que en base a este se pueden desarrollar una serie de problemas sobre: **fuerzas centrales** por simple comparación, tal como el que cotinúa (151) y el 211.

151.—Encontrar la magnitud de la velocidad de un satélite artificial que describe una órbita circular a una altura H sobre la superficie terrestre. La resistencia al movimiento debido a efectos atmosféricos particulares a la gravedad se desprecian. El radio de la Tierra es R.



SOLUCION:

Siendo la orbita circular se afirma: $e = 0$

$r = R + H \doteq$ Constante.

Estas condiciones son similares al problema anterior, siendo $r = L = R + H$

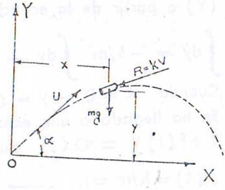
Por tanto; Sustituyendo este valor en las ecuaciones (IV) y (V) respectivamente del problema anterior se obtiene:

$$V = R\sqrt{g/L} = R\sqrt{g/(R+H)} \longrightarrow V = R\sqrt{\frac{g}{R+H}}$$

$$T = 2\pi r/v = 2\pi (R+H)/R\sqrt{g/(R+H)}$$

$$\longrightarrow T = \frac{2\pi (R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$$

158.—Tal como se muestra en el gráfico un proyectil es disparado con el ángulo y velocidad indicados desde O (Origen de un sistema fijo de coordenadas). La fuerza gravitatoria está representada por W = mg , y la resistencia por fricción tiene la misma dirección de la velocidad y sentido opuesto. Para velocidades menor a 100 pie/Seg. se supone que R es proporcional a V , (R = KV). Deducir las ecuaciones de las coordenadas X e Y en función del tiempo empleado después de disparar.



SOLUCION:

DATOS: $V < 100$ Pies / Seg. $\longrightarrow R = KV$

Del gráfico: $\longrightarrow \dot{x} = v. \text{Cos.}\,\theta \quad , \quad \dot{y} = v. \text{Sen.}\,\theta$

Aplicando la ecuación del movimiento en las direcciones X e Y, considerando las afirmaciones anteriores se deduce:

$\Sigma F_x = m. \ddot{x}$

$$m. \ddot{x} = - K (V. \text{Cos.}\theta) = - k\dot{x} \longrightarrow m\ddot{x} = - k\,\dot{x} \qquad [A]$$

$$m. \ddot{y} = - K (V. \text{Sen.}\theta) - mg = - k\dot{y} - mg \longrightarrow m\ddot{y} = - k\dot{y} - mg \qquad [B]$$

Puesto que $\ddot{X} = d\dot{X} / dt$, la ecuación (A) se puede integrar directamente considerando que $\dot{X}_{Inicial} = U.\ \text{Cos.}\propto$ [Ver gráfico.]

Por tanto:

$$\int_{U.\ \text{Cos.}\propto}^{\dot{x}} d\dot{x} / \dot{x} = - k/m \int_0^t dt$$

$$L_n\ [\dot{x}/U.\text{Cos.}\propto] = -kt/m \longrightarrow \dot{x} = U.\text{Cos.}\propto\ e^{-kt/m} \qquad [C]$$

Además puesto que: $\dot{X} = dX / dt$, la integral de (C) será:

$$\int dx = U.\text{Cos.}\propto \int e^{-kt/m}\,dt$$

$$x = [U.\text{Cos.}\propto\ e^{-kt/m}] / (-k/m) + C \quad \text{[Constante de Integración]}$$

Cuando: $t = 0 \longrightarrow x = 0$. Luego:

$$0 = [U.\text{Cos.}\propto\ e^{o}] / (-k/m) + C \longrightarrow C = mU.\text{Cos.}\propto / k$$

En consecuencia sustituyendo C y simplificando se obtiene:

$$x = U.\text{Cos.}\propto (1 - e^{-kt/m})$$

Resp.

En forma similar al procedimiento anterior se obtiene la coordenada (Y) a partir de la ecuación deferencial (B).

$$\int d\dot{y} = -k/m \int dy - g \int dt \longrightarrow \dot{y} + ky/m = -gt + C_1 \quad [D]$$

Cuando: $t = 0 \longrightarrow y = 0 \quad , \dot{y} = U.\text{Sen}.\alpha \longrightarrow C_1 = U.\text{Sen}.\alpha \quad [E]$

Se ha llegado a una ecuación (D) diferencial lineal de la forma: $Y' + f(t)\,Y = Q(t)$ empleada e indicada en el Prob. No. 15 Donde:

$$f(t) = k/m = K \longrightarrow \int Kdt = Kt \quad , \quad Q(t) = (-gt + C_1)$$

Por tanto:

$$y = e^{-kt}\left[\int (-gt + C_1)e^{kt}\,.\,dt\right]$$

$$y = e^{-kt}\left[\frac{c.e^{kt}}{k} - g\int e^{kt}.\,tdt + C_2\right] \text{------------} \quad [F]$$

Integrando por partes: $\int e^{kt}.\,tdt \quad \begin{cases} \text{haciendo} \; u = t \longrightarrow du = dt \\ dV = e^{kt}.\,dt \longrightarrow V = e^{kt}/K \end{cases}$

se deduce:

$$\int e^{kt}.\,tdt = \frac{te^{kt}}{K} - \frac{e^{kt}}{K^2} = \frac{e^{kt}}{K^2}(Kt - 1) \quad [G]$$

Sustituyendo (G) en la ecuación (F) se obtiene:

$$y = \frac{C}{K} - g/K^2\,[Kt - 1] + C_2e^{-kt}$$

Y según la ecuación (E).

$$y = \frac{U\ \text{Sen}.\ \alpha}{K} - g/K^2\,[Kt - 1] + C_2e^{-kt} \quad \text{--------------} \quad [H]$$

Pero cuando:

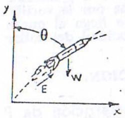
$$t = 0 \longrightarrow y = 0 \Longrightarrow$$

$$C_2 = -\left[(g/K^2) + U.\ \text{Sen}.\alpha/K\right]$$

Reemplazando C_2 en la ecuación (H):

Resp. $$y = \frac{1}{K^2}\left[KU.\ \text{Sen}.\ \alpha(1 - e^{-kt}) - g\,(Kt - e^{-kt} - 1)\right]$$

159.—Un cohete se mueve por encima de la superficie atmosférica cambiando su dirección de acuerdo a la función constante: $\theta = Kt$, siendo K una constante y t el tiempo. Determinar las coordenadas x e y en función del tiempo sabiendo que cuando $t = 0$, el cohete tiene una velocidad vertical U (Paralela al eje Y) y además $x = y = 0$. Asumir la atracción gravitatoria y la fuerza de empuje constantes en magnitud.



SOLUCION:

Según el enunciado : $\theta = Kt$; $t = 0 \longrightarrow \begin{cases} X = Y = 0 \\ V_y = U \end{cases}$ ......(A)

Aplicando la ecuación del movimiento en el eje Y del diagrama del cuerpo libre mostrado:

$\Sigma F_y = m a_y$ donde : $a_y = dV_y/dt$

$$E.\cos\theta - W = \frac{W}{g} a_y \longrightarrow \frac{dV_y}{dt} = \frac{Eg}{W}\cos.\theta - g$$

Integrando considerando la afirmación A :

$$\int_U^{V_y} dV_y = \int_0^t \left(\frac{Eg}{W}\cdot\cos.Kt - g\right)dt$$

$$V_y - U = \left|\frac{Eg}{WK}\,\text{Sen.}\,Kt - gt\right|_0^t \longrightarrow V_y = \frac{Eg}{WK}\,\text{Sen.}\,Kt - gt + U$$

Reintegrando la expresión anterior: $\left[V_y = dy/dt\right]$

$$\int_0^y dy = \int_0^t \left[\frac{Eg}{WK}\,\text{Sen.}\,Kt - gt + U\right]dt$$

$$y = \left|-\frac{Eg}{WK^2}\cos.Kt - \frac{gt^2}{2} + Ut\right|_0^t \longrightarrow \boxed{y = \frac{Eg}{K^2W}(1-\cos.Kt) - \frac{1}{2}gt^2 + Ut}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior en el eje X, se deduce :

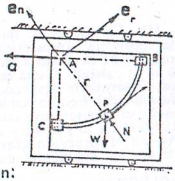
$\Sigma F_x = m a_x$; donde : $a_x = dV_x/dt$

$$E.\text{Sen.}\theta = m.a_x \longrightarrow dV_x = \frac{Eg}{W}\,\text{Sen.}\,Kt.dt$$

$$\int_0^{V_x} dV_x = \int_0^t \frac{Eg}{W}\,\text{Sen.}\,Kt\,dt \longrightarrow V_x = \frac{gE}{KW} - \frac{gE}{KW}\cos.Kt$$

$$\int_0^X dX = \int_0^t \frac{gE}{KW}(1-\cos.Kt)dt \longrightarrow \boxed{X = \frac{gE}{KW}\left(t - \frac{1}{K}\,\text{Sen.}\,Kt\right)}$$

162.—Si el collar A es soltado desde B en reposo respecto a la estructura F que se mueve hacia la izquierda con aceleración constante a , calcular la fuerza normal N ejercida por la varilla sobre el collar cuando este llega al punto C. Calcular también la velocidad del collar relativa a la estructura.



SOLUCION:

La aceleración de P está definida por la ecuación:

$$a_p = a_A + a_{P/A}$$
$$a_A = a\,(\text{Cos.}\,\theta\, e_n - \text{Sen.}\,\theta\, e_t)$$
$$a_{P/A} = \alpha \times r + \omega \times (\omega \times r) = -\alpha r e_t + \omega^2 r e_\theta$$

Luego: $a_p = (a\ \text{Cos.}\,\theta + \omega^2 r)e_\theta - (\alpha r + a\ \text{Sen.}\,\theta)e_t$

$$a_n = a\ \text{Cos.}\,\theta + \omega^2 r$$
$$a_t = -(\alpha r + a\ \text{Sen.}\,\theta)$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento en P se deduce:

$(\Sigma F_n = m.a_n)$; $N - W\ \text{Sen.}\,\theta = m\,(a.\ \text{Cos.}\,\theta + \omega^2 r$ .... [I]

$(\Sigma F_t = m.a_t)$: $-W\ \text{Cos.}\,\theta = -m\,(\alpha r + a\ \text{Sen.}\,\theta)$ .... [II]

De la ecuación II se despeja: $\alpha = \dfrac{g\ \text{Cos.}\theta - a\ \text{Sen.}\,\theta}{r}$

Por lo tanto:

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \longrightarrow \int_0^{\omega} \omega d\omega = \frac{1}{r}\int_0^{\pi/2} [g\ \text{Cos.}\,\theta - a\ \text{Sen.}\,\theta]\, d\theta$$

$$\frac{\omega^2 - 0}{2} = \frac{1}{r}\Big| a\ \text{Cos.}\,\theta + g\ \text{Sen.}\,\theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\omega^2 = \frac{2}{r}\Big[a(0-1) + g(1-0)\Big] \rightarrow \omega^2 = \frac{2}{r}(g-a) \text{[III]}$$

Sustituyendo III en la ecuación I y considerando que:

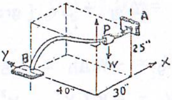
$$\theta = \pi/2$$

$$N = W\ \text{Sen.}\,\theta + m\left[a\ \text{Cos.}\,\theta + \frac{2}{r}(g-a)r\right] \longrightarrow N = W\left(3 - \frac{2a}{g}\right)$$

Además $v_{A/c} = \omega.r$ donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{r}(g-a)} \longrightarrow \boxed{v_{A/c} = \sqrt{2r\,(g-a)}}$$

169.—El deslizador P de 3 Lb. de peso se mueve a lo largo de la varilla lisa AB mostrada, por acción de su propio peso y de la aplicación de una fuerza externa constante dada por : F = — 10 I + 15 J + 10 K Lb. Si el deslizador parte del reposo en A determinar la velocidad que adquiere al llegar al punto B.



SOLUCION:

Del enunciado: $F = -2I + 3J + 2K$ Donde: $\begin{cases} F_x = -2 \text{ Lb.} \\ F_y = 3 \text{ Lb.} \\ F_z = 2 \text{ Lb.} \end{cases}$

El trabajo efectuado por F es:

$$\Delta U = \int_a^b F.dr = \int_a^b (F_x.dX + F_y.dy + F_z.dZ) = \int_{30}^{0} -2dX + \int_0^{40} 3dy + \int_{25}^{0} 2dZ$$

$$\Delta U = [0 + 60] + [120 - 0] + [0 - 50] = 130 \text{ Lb. Pulg.} \text{ -------- [I]}$$

La energía cinética y potencial entre A y B es:

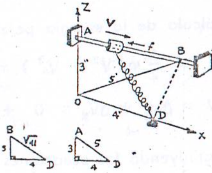
$$\Delta V = \Delta V_g = -W\Delta h = -3(25) = -75 \text{ Lb Pulg.} \text{ -------------- [II]}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{32.2 \times 12}\right)(V_B^2 - 0) = \frac{V_B^2}{257.6} \text{ ----- [III]}$$

Sustituyendo las ecuaciones I, II y III en el teorema de fuerzas vivas: [$\Delta U = \Delta V + \Delta T$] Se obtiene :

$$130 = (V_B^2 / 257.6) - 75 \longrightarrow V_B = 230 \text{ Pulg./Seg.}$$ Resp.

172.—El collar C de 5 Lb. de peso resbala con rozamiento desde A hasta B sobre la varilla circular fija, llevando adherido un resorte. Determinar la energía perdida por rozamiento si el collar tiene una velocidad de 6 pies/Seg. al pasar por A y 8 pies/Seg. al llegar al punto B. La constante del resorte es de 2 Lb./pie y su longitud sin estirar es de 3 pies.



SOLUCION:

Considerando datos del problema y el diagrama se deduce:

Energía cinética del sistema:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)(64 - 36) = 70/32.2 \text{ Lb. pies} \text{ [I]}$$

Energía potencial del sistema:

$\Delta V = \Delta V_g + \Delta V_e$ [gravitatoria y elástica.].

$\Delta V_g = -W.\Delta h = -5(3) = -15$ Lb. pies .... [II]

$\Delta V_e = \frac{1}{2}K(X_B^2 - X_A^2)$ donde $\begin{cases} X_A = DA - 3 = 5 - 3 = 2 \text{ pies} \\ X_B = DB - 3 = \sqrt{41} - 3 \text{ pies} \end{cases}$

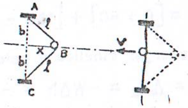
$\Delta V_e = (1/2)(2)\left[(\sqrt{41} - 3)^2 - 4\right] = 46 - 6\sqrt{41}$ .... [III]

Aplicando la ecuación del trabajo y la energía se deduce:

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$

$\Delta U = 70/32.2 - 15 + 46 - 6\sqrt{41} \longrightarrow -\Delta U = 5.25$ Lb. pies Resp.

173.—Usando el principio de trabajo y energía resolver el problema Nº 142 que fue resuelto en el capítulo correspondiente a Cinemática de una partícula.



SOLUCION:

Por condiciones del problema:

$K' = K/b \qquad \ell = \sqrt{b^2 + X^2}$ .... [I]

Puesto que no actúan fuerzas externas y no se considera trabajo por fricción la ecuación general de la energía se reduce a:

$\Delta U = \Delta T + \Delta V + \Delta Q \longrightarrow \Delta T = -\Delta V$ .... [II]

Cálculo de la energía potencial y cinética para el desplazamiento X.

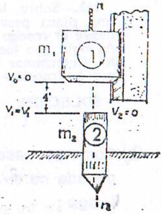
$\Delta T = \frac{1}{2}m(V^2 - V_o^2) = \frac{1}{2}mV^2$ (Parte del reposo) .... (A)

$\Delta V = \Delta V_g + \Delta V_e = 0 + \Delta V_e = -2\left[\frac{1}{2}K'(\Delta\ell)^2\right] = -\frac{K}{b}(\ell - b)^2$ (B)

Sustituyendo las ecuaciones I,A y B en [II]

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{K(\ell - b)^2}{b} = \frac{K}{b}\left[\sqrt{b^2 + X^2} - b\right]^2 \longrightarrow \boxed{V = \left(\sqrt{b^2 + X^2} - b\right)\sqrt{\frac{2K}{mb}}}$$

192.—El mazo de un martinete pesa 600 Lb. y cae desde una altura de 4 pies como se indica partiendo del reposo, incidiendo sobre la cabeza de un barreno de 300 Lb. que está clavado 3 pies bajo el suelo. Después del choque el mazo y el barreno se desplazan juntos sin rebote apreciable. Calcular la velocidad común de ambos inmediatamente después del choque.



SOLUCION:

Despreciando el rozamiento en la guía del martinete la velocidad de (1) un instante antes del choque estará definida por la ecuación

$$V_1^2 = V_0^2 + 2gh \quad \text{(Ver diagrama)}$$

Luego: $\quad V_1^2 = 0 + 2(32.2)(4) \longrightarrow V_1 = 4\sqrt{16.1}$ ...... (A)

Aplicando conservación de cantidad de movimiento en la dirección n se obtiene:

$$\Delta G_n = 0 \longrightarrow m_2 V_2^1 + m_1 V_1^1 = m_2 V_2 + m_1 V_1 \quad .... \text{(B)}$$

donde por condiciones del enunciado $V_2 = 0$ (Está en reposo)
Reemplazando valores en (B) incluyendo la ecuación (A) y eliminando g: $[m = w/g]$

$$300\, V_2^1 + 600\, V_1^1 = 0 + 600\left[4\sqrt{16.1}\right] \longrightarrow V_2^1 + 2V_1^1 - 8\sqrt{16.1} = 0 \text{ (C}$$

Además ambos cuerpos son inelásticos ya que se mueven junto después del choque luego el coeficiente de restitución será:

$$e = 0$$

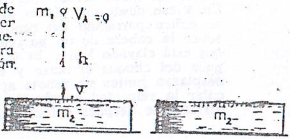
Por lo tanto: $\quad e = \dfrac{\text{velocidad relativa de separación}}{\text{velocidad relativa de acercamiento}}$

$$e = \frac{V_2^1 - V_1^1}{V_2 - V_1} = 0 \longrightarrow V_2^1 = V_1^1 = V \text{ (D)}$$

Reemplazando la ecuación (D) en (C):

$$3V = 8\sqrt{16.1} \longrightarrow V = 10.7 \text{ pies/Seg.}$$

193.—Sobre la superficie horizontal de una placa pesada de acero, se deja caer desde el reposo a una altura h, una pequeña bola que luego rebota hasta una altura h' Determinar el coeficiente de restitución e y la fracción ΔE de energía perdida



SOLUCION:

a). Como la masa de la bola es pequeñisima en comparacion con la placa pesada no se conserva la cantidad de movimiento,

Luego:

$$V_2 = 0 \qquad V_2^1 = 0 \quad \text{.............} \quad (\mathrm{I})$$

El coeficiente de restitución estará definido por la Ecuación:

$$e = \frac{V_2^1 - V_1^1}{V_2 - V_1} \quad \text{.............} \quad (\mathrm{II})$$

Además, según la ecuación de caida libre tenemos:

Antes del choque $\longleftarrow$ $V_1^2 = V_A^2 + 2gh$

Como $V_A = 0$ porque parte del reposo.

$$V_1 = \sqrt{2gh} \quad \text{.............} \quad (\mathrm{III})$$

Después del choque:

$$V_B^2 = \left[V_1^1\right]^2 - 2gh^1$$

Como h max $\longrightarrow V_B = 0$

$$V_1^1 = \sqrt{2gh^1} \quad \text{.............} \quad (\mathrm{IV})$$

Reemplazando (I) (III) y (IV) en (II)

$$e = \frac{0 - \sqrt{2gh^1}}{0 - \sqrt{2gh}}$$

Luego:

$$e = \sqrt{\frac{h^1}{h}}$$

Resp.

b). Por conservacion de energía tendremos la Ecuación:

$$\Delta T + \Delta V + \Delta E = 0$$

Donde ΔE = Pérdida de energía.

Luego considerando I de la parte [a] :

$$\frac{1}{2}\left[\left(V_1^1\right)^2 - V_1^2\right] + mg\left[h' - h\right] + \Delta E = 0$$

Reemplazando (III) y (IV) de la parte [a]

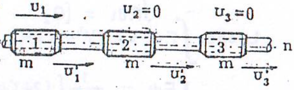
$$\frac{1}{2}\, m\left[2gh^1-2gh\right]+mg\left[h^1-h\right]+\Delta E=0$$

finalmente:

$$\Delta E=2mg\left[h-h^1\right]$$

Resp.

194.—Los tres cilindros iguales de acero resbalan libremente sobre el eje horizontal fijo. El cilindro (1) se desplaza hacia los cilindros (2) y (3) que están en reposo, con velocidad U. Determinar la velocidad final del cilindro (3) después de ser impulsado por el cilindro (2), en función del coeficiente de restitución e y de la velocidad U.



SOLUCION:

Analizando los cilindros (1) y (2):

Por conservación de cantidad de movimiento se obtiene:

$$\Delta G_n = 0 \longrightarrow mU_2' + mU' = mU_2 + mU$$

donde: $U_2 = 0 \longrightarrow U_2' = U - U'$ .... (A)

El coeficiente de restitución para este caso será:

$$e = \frac{U_2' - U'}{0 + U} \longrightarrow U' = U_2' - eU \text{ .... (B)}$$

Reemplazando la ecuación (B) en (A)

$$U_2' = U - \left[U_2' - eU\right] \longrightarrow U_2' = \frac{U(1+e)}{2} \text{ .... (C)}$$

Por comodidad consideremos : $\{U_2' = U_B\}$

La velocidad U_B será la que actuará sobre el cilindro (3) similarmente al analisis que se ha hecho para el cilindro (1) se obtiene:

$$\Delta G_n = 0 \longrightarrow mU_3' + mU_B' = mU_3 + mU_B$$

donde: $U_3 = 0 \longrightarrow U_3' = U_B - U_B'$ .... (D)

$$e = \frac{U_3' - U_B'}{0 + U_B} \longrightarrow U_B' = U_3' - e.U_B \text{ .... (E)}$$

Reemplazando (E) y (C) en la ecuación (D):

$$U_3' = U_B - \left[U_3' - e.U_B\right] = -U_3' + U_B(1+e)$$

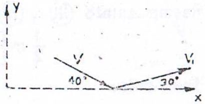
$$U_3' = \left\{\frac{1+e}{2}\right\}\left\{\frac{U\left[1+e\right]}{2}\right\} = V\left(\text{Velocidad final del cilindro } 3\right)$$

Finalmente:

$$V = \frac{U}{4}(1+e)^2$$

Resp.

203.—Una bola de peso 1 lb. rebota sobre el suelo siguiendo las direcciones mostradas. Si la velocidad antes del choque es 30 pies/seg. e inmediatamente después 24 pies/seg.; determinar el impulso que actúa sobre la bola.



SOLUCION:

El impulso está Relacionado con la cantidad de movimiento por la ecuación:

$$\int F.dt = [G_2 - G_1]$$

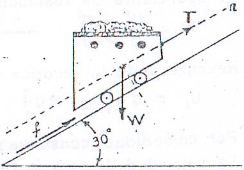
Luego: $\int F.dt = m(V' - V) = m\ [24(\text{Cos. } 30°\mathbf{i} + \text{Sen. } 30\,\mathbf{J}) - 30(\text{Cos. } 40°\mathbf{i} - \text{Sen. } 40°\mathbf{J})]$

$$\int F.dt = \frac{1}{32.2}[(24 \text{ Cos. } 30 - 30 \text{ Cos } 40)\mathbf{i} + (24 \text{ Sen } 30 + 30 \text{ Sen. } 40)\mathbf{J}]$$

$$\int F.dt = \frac{1}{32.2}(-2.1948\,\mathbf{i} + 19.302\,\mathbf{J})$$

Donde: impulso $= -0.0681\,\mathbf{i} + 0.599\,\mathbf{J}$ Lb. Seg. Resp.

202.—El vagón mostrado cuyo peso junto con su carga es de 5,000 Lb., desciende con una velocidad de 8 pies/Seg. Si la resistencia total a la rodadura equivale a 420 Lb., determinar el tiempo que emplea para detenerse luego de aplicarle una fuerza T de 2,500 Lb. hacia arriba.



SOLUCION:

El impulso producido por las fuerzas externas está relacionado por la ecuación vectorial:

$\int F.dt = m(V_2 - V_1)$ cuya componente escalar en la dirección n será:

$$\int F_n.dt = m(V_2 - V_1)_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

donde según el gráfico se deduce:

$$F_n = T + f - W \text{ Sen. } 30° = \text{constante.}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$F_n = 2{,}500 + 420 - 4{,}000\left(\frac{1}{2}\right) = 920 \text{ Lb.}$$

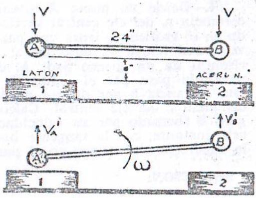
Luego según [I]

$$920t = m[0 - (-V)] = \frac{4{,}000}{32.2}(8)$$

Finalmente se deduce:

$$t = 1.08 \text{ Seg.}$$ Resp.

203.—Dos bolas iguales de acero están unidas como se muestra en el gráfico por una barra rígida de peso despreciable, y se dejan caer desde el reposo en posición horizontal a una altura de 6 Pulg. sobre dos masas pesadas de acero y latón. Si el coeficiente de restitución para la bola y la masa de latón es 0.4 y para la otra bola y la masa de acero es 0.6, calcular la velocidad angular ω de la barra inmediatamente después del rebote. Suponer que ambos impactos son simultáneos.



SOLUCION:

Según el gráfico y considerando que (A) y (B) parten del reposo:

$$V = 0 \qquad h = 6$$

Luego:

$$V_A^2 = V_B^2 = V^2 + 2gh = 0 + 12g$$

$$V_A = V_B = \sqrt{12g} \quad \text{Pulg./Seg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Siendo V_A y V_B velocidades antes del choque.

Además, como las masas de acero y latón son bastante pesadas, no se conserva la cantidad de movimiento; luego:

$$V_1 = V_1' = 0 \qquad V_2 = V_2' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Los coeficientes de restitución exigidos serán:

$$e_{acero} = \frac{V_2' - V_B'}{V_2 - V_B}$$

$$e_{latón} = \frac{V_1' - V_A'}{V_1 - V_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III) tenemos:

$$V_B' = e_a V_B$$

$$V_A' = e_l V_A$$

Reemplazando valores:

$$V_B' = 0.6\ \sqrt{12g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

$$V_A' = 0.4\ \sqrt{12g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

El movimiento de (A) y (B) despues del choque está relacionado por la ecuación:

$$V_B' = V_A' + V_{B/A}$$

Reemplazando (IV) y (V) tenemos:

$$0.6\ \sqrt{12g} = 0.4\ \sqrt{12g} + \omega_{AB}\ (24)$$

Luego:

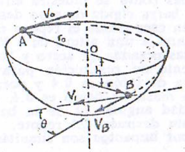
$$\omega_{AB} = \frac{0.2\ \sqrt{12g}}{24} \qquad \text{donde} \qquad g = 32.2 \times 12\ \text{pulg/seg}^2$$

Finalmente:

$$\omega_{AB} = 0.57 \quad \text{rad./Seg}$$

Resp

204.—Desde un punto A situado a una distancia r_o del eje central vertical mostrado en el gráfico, se lanza una partícula con velocidad inicial V_o tangente al borde horizontal de un cuenco liso. Al deslizar la partícula pasa por el punto B situado a una distancia h por debajo de A y a una distancia r del eje central. Calcular el ángulo θ formado por su velocidad (V_B) en este instante, con la tangente horizontal a la superficie del cuenco en el punto B.



SOLUCION:

En el diagrama se observa que V_o y V_1 tienen direcciones opuestas.
La suma de momentos cinéticos respecto a O será:

$$\{\Sigma h_o = 0\} \quad r_o \times mV_o - r \times mV_1 = 0 \quad \text{........................} \quad [I]$$

Considerando que: $r_o \perp V_o$ y $r \perp V_1$ y según la ecuación I:

$$r_o m V_o \text{ Sen. } 90° - r m V_1 \text{ Sen. } 90° = 0 \longrightarrow V_1 = r_o V_o / r \quad (A)$$

Por conservación de energía: $\{\Delta T = \Delta V\}$ Por tanto:

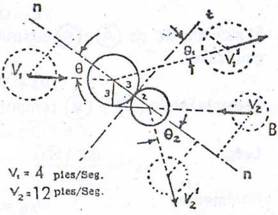
$$\frac{1}{2} m \left\{ V_B^2 - V_o^2 \right\} = mgh \longrightarrow V_B = \sqrt{V_o^2 + 2gh} \quad \text{.........} (B)$$

Ademas según el gráfico: $V_1 = V_B \text{ Cos. } \theta \longrightarrow \text{Cos. } \theta = V_1 / V_B \quad (C)$

Sustituyendo (A) y (B) en la ecuación C se obtiene:

$$\text{Cos. } \theta = \frac{r_o V_o}{r\sqrt{V_o^2 + 2gh}} \quad \text{Resp.}$$

206.—La esfera A de radio 3 Pulg. pesa 46 Lb., y la esfera B de radio 2 Pulg. pesa 8 Lb. Si ambas se desplazan inicialmente a lo largo de trayectorias paralelas con las velocidades indicadas en el gráfico; calcular sus velocidades respectivas inmediatamente después del choque, despreciando el rozamiento. El coeficiente de restitución es 0.4.



SOLUCION:

SOLUCION:

Por geometría de las esferas hallamos el ángulo θ, el cual se forma por la recta que une los controides de las esferas y el eje de desplazamiento antes del choque:

Luego:

$$\text{Sen. } \theta = \frac{3}{5} = 0.6 \; ; \; \text{Cos.}\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

Aplicando la ecuación de conservación de cantidad de movimiento entre las esferas en la dirección n:

$$\Delta G_n = 0 \longrightarrow G_n = G'_n$$

Por tanto:

$$m_2 V_2^1 \text{ Cos.}\theta_2 + m_1 V_1^1 \text{ Sen. } \theta_1 = m_1 V_1 \text{ Cos}\theta - m_2 V_2 \text{ Cos } \theta$$

Reemplazando valores numéricos:

$$8 V_2^1 . \text{Cos.}\theta_2 + 46 \; V_1^1 \text{Sen}\theta_1 = 0.8 [46(4) - 8 \; (12)]$$

$$V_2^1 . \text{Cos}\theta_2 + 5.75 \; V_1^1 \text{Sen}\theta_1 = 8.8 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [I]$$

Según el gráfico el coeficiente de restitución está dado por:

$$0.4 = \frac{V_2^1 \text{ Cos } \theta_2 - V_1^1 \text{ Sen } \theta_1}{V_2 \text{ Cos. } \theta + V_1 \text{ Cos. } \theta}$$

Reemplazando valores en el denominador y simplificando:

$$V_2^1 \text{ Cos.}\theta_2 - V_1^1 \text{ Sen. } \theta_1 = 5.12 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [II]$$

Aplicando la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para cada esfera en la dirección tangencial, considerando que las fuerzas de contacto o de choque no tienen componente en esta dirección:

$$\Delta G_t = 0$$

Luego:

$$V_1 \text{ Sen}\theta = V_1^1 \text{ Cos.}\theta_1 = 4[0.6]$$

$$V_2 \text{ Sen}\theta = V_2^1 \text{ Sen } \theta_2 = 12[0.6]$$

Simplificando

$$V_1^1 \text{ Cos } \theta_1 = 2.4 \; \ldots\ldots\ldots\ldots [III]$$

$$V_2^1 \text{ Sen } \theta_2 = 7.2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots [IV]$$

Por reducción eliminamos el Cos. de la ecuaciones I y II y dividiendo dicho resultado por la ecuación III se deduce:

$$\text{tg } \theta_1 = 0.227 \longrightarrow \theta_1 = 12.8^\circ$$ Resp.

Similarmente eliminamos el Sen. de las ecuaciones I y II y dividiendo el resultado por la ecuación IV se obtiene:

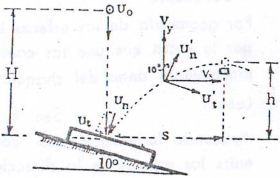
$$\text{Cotg.}\theta_2 = 0.7026 \longrightarrow \theta_2 = 51.6^\circ$$ Resp.

Finalmente reeplazando θ_1 y θ_2 en las ecuaciones III y IV se obtiene:

$$V_1^1 = 2.467 \text{ pies/Seg}$$

$$V_2^1 = 9.169 \text{ pies/Seg}$$ Resp.

208.—El instrumento mostrado es usado para medir la calidad de bolas de acero. La barra A se fija en el punto más alto de la trayectoria seguida por las bolas después del rebote producido cuando se sueltan desde una altura H = 36 pulg. sobre la plancha pesada inclinada y también de acero. Ubicar la posición de la barra A especificando h y s, tal que las bolas cuyo coeficiente de restitución al rebote sea menor a 0.7 se eliminen. Despreciar la fricción durante el impacto.



SOLUCION:

La velocidad antes del choque estará regida por la ecuación de caída libre.

$$U^2 = U_o^2 + 2gh = 0 + 2(32.2)(3) \longrightarrow U = 13.9 \text{ pies/Seg.}$$

Descomponiendo **U** en las direcciones n,t:

$$U_t = U.\text{Sen.}10° = 13.9 \text{ Sen.}10° \longrightarrow U_t = 2.41 \text{ pies/Seg.}$$

$$U_n = U.\text{Cos.}10° = 13.9 \text{ Cos.}10° \longrightarrow U_n = 13.7 \text{ pies/Seg.}$$

Tal como ilustra el gráfico la componente vectorial paralela al plano inclinado no varía por ser la cara lisa:

$$U_t = U_t^1 = 2.41 \text{ pies/Seg.} \quad \text{.........} \quad (A)$$

Además la componente vertical al plano inclinado actúa sobre un cuerpo de masa infinita (Está en contacto con el suelo), en consecuencia no se conserva la cantidad de movimiento. El coeficiente de restitución se regirá por la ecuación:

$$e = \frac{0 - U_n^1}{U_n - 0} \longrightarrow U_n^1 = -eU_n = -0.7(13.7) \longrightarrow U_n^1 = 9.58\uparrow \quad (B$$

Según el gráfico: las proyecciones Vy, Vx pertenecen al vector velocidad inicial de la trayectoria parabólica mostrada. Por tanto según (A) y (B):

$$V_y = U_n^1 \text{Cos.}10° = 9.58 \text{ Cos.}10° \longrightarrow V_y = 9.4 \text{ pies/Seg.}$$

$$V_x = U_t^1 \text{Cos.}10° = 2.41 \text{ Cos.}10° \longrightarrow V_x = 2.37 \text{ pies/Seg.}$$

Para: $h_{max.} \longrightarrow V_y^1 = 0$, luego : $\left[V_y^1\right]^2 = V_y^2 - 2gh$

$$h = \frac{(9.4)^2}{2(32.2)} \longrightarrow h = 1.37 \text{ pies}$$

Además el tiempo en el cual la bola recorre h es común al empleado al recorrer s.

Por tanto:

$$s = V_x t \quad \text{.........} \quad C$$

$$h = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{.........} \quad D$$

Reemplazando valores en (D) se obtiene la ecuación :

$$16.1t^2 - 9.4t - 1.37 = 0 \longrightarrow t = 0.65 \text{ Seg.}$$

Luego según (C) $S = 2.37(0.65) \longrightarrow S = 1.54$ pies

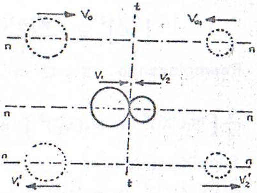
Resp

209.—Demostrar que la pérdida de energía debido al choque central directo de las masas m_1 y m_2 cuyas velocidades antes del choque son V_1 y V_2 dirigidas en la misma dirección y acercándose en sentidos opuestos; está definida por la ecuación:

$$\triangle E = \frac{1 - e^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} (V_1 + V_2)^2 \text{, siendo}$$

e el coeficiente de restitución para estas condiciones particulares del choque en la cual se desprecia la energía interna de vibración.

Nota.—La pérdida de energía está en función de la velocidad relativa de choque $V_1 + V_2$,en consecuencia: el centro de gravedad del sistema puede considerarse en reposo cumpliéndose la relación: $m_1 V_1 = m_2 V_2$.



SOLUCION:

Por conservación de energía según el gráfico se observa:

$$\frac{1}{2} m_1\left[(V_1^1)^2 - V_1^2\right] + \frac{1}{2} m_2\left[(V_2^1)^2 - V_2^2\right] + \Delta E = 0$$

Donde ΔE Pérdida de energía devido al choque central directo.

Luego:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left[m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2\right] - \frac{1}{2}\left[m_1 (V_1^1)^2 + m_2 (V_2^1)^2\right] \text{ .... (I)}$$

Según el gráfico el coeficiente de restitución estará definido por:

$$e = \frac{V_2^1 + V_1^1}{V_2 + V_1} \text{ .... (II)}$$

Además por condición del problema:

a) $V_1 = \dfrac{m_2 V_2}{m_1}$ b) $V_1^1 = \dfrac{m_2}{m_1} V_2^1$ .... (III)

De la ecuación II deducimos:

$$e^2 (V_2 + V_1)^2 = \left[V_2^1 + V_1^1\right]^2 = \left[V_2^1\right]^2 + 2V_1^1 V_2^1 + \left[V_1^1\right]^2$$

Reemplazando (III − b)

$$e^2(V_2+V_1)^2 = \left[V_2^1\right]^2 + 2\frac{m_2}{m_1}\left[V_2^1\right]^2 + \left[\frac{m_2}{m_1}V_2^1\right]^2$$

Simplificando:

$$\left[V_2^1\right]^2 = \frac{m_1^2 e^2(V_1+V_2)^2}{(m_1+m_2)^2} \quad \text{..............................} \quad \text{IV}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación III − b:

$$\left[V_1^1\right]^2 = \frac{m_2^2 e^2(V_1+V_2)^2}{(m_1+m_2)^2} \quad \text{..............................} \quad \text{V}$$

Reemplazando IV y V en el segundo sumando de [I]

$$\frac{1}{2}\left[m_1(V_1^1)^2 + m_2(V_2^1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^2(V_1+V_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\right]\left[m_1m_2^2 + m_2m_1^2\right]$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}\left[m_1(V_1^1)^2 + m_2(V_2^1)^2\right] = \frac{e^2(V_1+V_2)^2 m_1m_2}{2(m_1+m_2)} \quad \text{.........} \quad \text{VI}$$

Reemplazando [III −a] en el primer sumando de la ecuación [I]:

$$\frac{1}{2}\left[m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right] = \frac{1}{2}\left[m_1V_1\left(\frac{m_2}{m_1}V_2\right) + m_2V_2^2\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right] = \frac{1}{2}m_2V_2(V_1+V_2) \quad \text{.....................} \quad \text{VII}$$

Además si sumamos y restamos m_1V_2 en III−a tenemos:

$$m_1V_1 = m_2V_2 + m_1V_2 - m_1V_2$$

Factorizando:

$$V_2 = \frac{m_1(V_1+V_2)}{m_1+m_2} \quad \text{.....................} \quad \text{VIII}$$

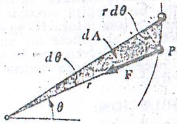
Reemplazando VIII en la ecuación VII hallamos:

$$\frac{1}{2}\left[m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right] = \frac{1}{2}m_1m_2\frac{(V_1+V_2)^2}{m_1+m_2} \quad \text{...............} \quad \text{IX}$$

Finalmente reemplazamos VI IX en I hallamos:

$$\Delta E = \frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(V_1+V_2)^2 \qquad \text{Resp.}$$

FUERZAS CENTRALES



Para ilustración de la teoría correspondiente a este capítulo, revisar los problemas resueltos Ns. 150 y 151 (PAGINA 89)

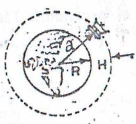
Leyes de Kepler :

1o.—Ley de la órbita elíptica para el movimiento planetario. (VER PROBLEMA 150)

2o.—El radio vector de una órbita, barre áreas iguales en tiempos iguales. (VER PROB. 42)

3o.—El cuadrado del período orbital T es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica descrita. $T^2 = K a^3$

210.—Partiendo de la ecuación dada A, deducir la expresión para la velocidad de un satélite que describe una órbita circular a una altura H, cuando e = 0 y a = R + H. (Ver problema 151).



SOLUCION:

La ecuación enunciada es:

$$V^2 = 2g\,R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \qquad [A]$$

Por condición del problema $e = 0$, o sea que no existe excentricidad; en consecuencia para cualquier punto de la trayectoria se cumplirá:

$$a = r = R + H \qquad (2)$$

Donde a = Eje menor de la órbita elíptica
r = Distancia del centro de la Tierra al Satélite.
R = Radio de la Tierra.
H = Distancia de la superficie de la Tierra al Satélite.

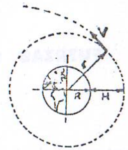
Reemplazando a = r en la ecuación [A]

$$V^2 = 2g.R^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) \longrightarrow V = R\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (3) se obtiene la ecuación de la velocidad de un satélite en órbita circular a una altura h, la misma que fué demostrada en problema 151.

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+H}} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

211.—El propulsor de un cohete, que describe una órbita circular al rededor de la Tierra a una altura H; se activa tal que proporciona al cohete un aumento brusco de velocidad. Determinar la velocidad de escape necesaria para vencer la influencia terrestre.



SOLUCION:

El satélite vencerá la fuerza de atracción de la Tierra, cuando inicie una trayectoria parobólica o hiperbólica (Ello se demuestra).

Suponiendo parabólica se afirma:

$$e = \text{exentricidad} = 1 \qquad \text{[I]}$$

Antes y en el instante de iniciar dicha trayectoria se afirma:

$$r = R + H = \text{constante} \qquad \text{[II]}$$

$$V = V_{\text{Inicial}} = r\,\dot{\theta} \qquad \text{[III]}$$

$$\theta = 0 \longrightarrow \text{Cos. } 0 = 1 \qquad \text{[IV]}$$

En el problema 150 se demostro:

$$C = r^2\,\dot{\theta} \qquad \text{(Ecuación B)} \qquad \text{[V]}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{KM}{C^2} + D.\ \text{Cos. } \theta \qquad \text{(Ecuación G)} \qquad \text{[VI]}$$

$$e = \frac{C^2 D}{KM} \qquad \text{(Ecuación I)} \qquad \text{[VII]}$$

Y en el problema 149 se demostró:

$$KM = gR^2 \qquad \text{[VIII]}$$

Según las afirmaciones II, III y V se deduce:

$$c = r\,(r\dot{\theta}) = rv = (R + H)\,V \qquad \text{[A]}$$

Y según las afirmaciones IV y VI se obtiene:

$$D = \frac{1}{r} - \frac{KM}{C^2} \qquad \text{[B]}$$

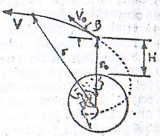
Sustituyendo las ecuaciones: I, II, VIII, A y B en (VII) se deduce:

$$e = \frac{(R+H)^2\,V^2}{gR^2}\left[\frac{1}{R+H} - \frac{gR^2}{(R+H)^2V^2}\right] = 1$$

Despejando V se obtiene:

$$V = R\sqrt{\frac{2g}{R+H}} \qquad \text{Resp.}$$

214.—El Satélite artificial mostrado se ha puesto en órbita a partir de una altura H con velocidad inicial absoluta Vo y con el ángulo indicado. Determinar la ecuación de la velocidad del satélite durante su órbita en función del módulo de su radio vector que parte del centro de la Tierra.



SOLUCION:

Puesto que la única fuerza que actúa es la gravitatoria debido a su masa; el sistema es conservativo. Por tanto:

$$\Delta V + \Delta T = 0 \qquad [I]$$

Cálculo de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \left(V^2 - V_o^2\right) \quad \text{Siendo: } V = \text{Velocidad en cualquier instante.} \qquad [II]$$

Por definición de energía potencial:

$$= V_2 - V_1 = -\int_A^B \mathbf{F} . d\,\mathbf{r} = -\int_A^B F_r . dr \qquad [A]$$

donde F_r = Fuerza radial gravitatoria

$$F_r = \frac{K m M}{r^2}$$

Pero según el problema 149 : $KM = gR^2$

Por tanto:

$$F_r = \frac{m g R^2}{r^2}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (A) e integrando entre los Límites: $r_o = R + H$; $r = r$ Se obtiene:

$$\Delta V = - m g R^2 \int_{r_o = R + H}^{r} \frac{dr}{r^2} = - m g R^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}\right] \quad [I$$

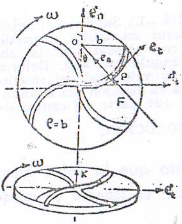
Sustituyendo las ecuaciones II y III en (I) se obtiene:

$$\frac{1}{2} m \left(V^2 - V_o^2\right) - m g R^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}\right] = 0$$

Despejando V^2 se deduce:

$$V^2 = V_o^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}\right] \qquad \text{Resp.}$$

235.—Cada partícula de masa m se desplaza con fricción despreciable a lo largo de las ranuras circulares del disco mostrado, el cual está rotando en un plano horizontal con velocidad angular constante ω. Deducir una expresión para la fuerza F ejercida por la ranura sobra una partícula en función de θ, suponiendo que cada partícula parte del reposo en θ = 0. Para estas condiciones, calcular también la velocidad U de la partícula relativa a la ranura justo antes de abandonarla.



SOLUCION:

La aceleración total de P está definida por la ecuación

$$a_p = a_o + a_r + \omega \times (\omega \times \rho) + \dot{\omega} \times \rho + 2\omega \times V_r \qquad [I]$$

Cuyos términos se deducen similarmente como en problemas anteriores.

[A] $a_o = \dot{\omega} \times b + \omega \times (\omega \times b) = \bar{0} - \omega^2 b e_n' =$

$$- \omega^2 b (\text{ Sen.}\,\theta\, e_t + \text{Cos.}\,\theta\, e_n)$$

[B] $a_r = \ddot{\theta} \times \rho - \dot{\theta}^2 \rho = \ddot{\theta} b e_t + \dot{\theta}^2 b\, e_n$

[C] $\omega \times (\omega \times \rho) = -\omega^2 \rho = b\omega^2 e_n$

[D] $2\omega \times V_r = 2(-\omega K) \times (\dot{\theta} b e_t) = -2\omega\dot{\theta} b e_n$

Sustituyendo las ecuaciones A, B, C y D en I se obtiene:

$$a_p = (\ddot{\theta} b - \omega^2 b \text{ Sen.}\,\theta)\, e_t + (\dot{\theta}^2 b - \omega^2 b \text{ Cos.}\,\theta + \omega^2 b - 2\omega\dot{\theta} b)\, e_n$$

Aplicando la ecuación del movimiento en ambas componentes: e_t, e_n.

$$\Sigma F_n = m a_n \longrightarrow F = m(\dot{\theta}^2 b - \omega^2 b \text{ Cos.}\,\theta + \omega^2 b - 2\omega\dot{\theta} b) \qquad [II]$$

$$\Sigma F_t = m a_t \longrightarrow 0 = m(\ddot{\theta} b - \omega^2 b \text{ Sen.}\,\theta) \longrightarrow \ddot{\theta} = \omega^2 \text{Sen.}\,\theta \qquad [III]$$

Sabemos que $\dot{\theta}$ está relacionada con $\ddot{\theta}$ por la ecuación: $\dot{\theta}.\,d\dot{\theta} = \ddot{\theta}.\,d\theta$

y según III . $\displaystyle\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \omega^2 \int_0^{\theta} \text{Sen.}\,\theta\,d\theta$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(1 - \text{Cos.}\,\theta) \longrightarrow \dot{\theta} = 2\omega\,.\,\text{Sen.}(\theta/2) \qquad [IV]$$

Sustituyendo la ecuación IV en II se obtiene:

$$F = m\omega^2 b[1 - \text{Cos.}\,\theta + 4 \text{ Sen.}^2\theta/2 - 4 \text{ Sen.}\,\theta/2]$$

Pero $(1 - \text{Cos.}\,\theta) = 2.\text{Sen.}^2\theta/2 \longrightarrow$

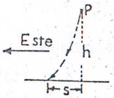
$$F = 2mb\omega^2 \text{ Sen.}\,\theta/2[3\,.\,\text{Sen.}\,\theta/2 - 2] \qquad \text{Resp.}$$

La velocidad relativa de la partícula en el instante que sale de la ranura es:

Según IV : $V_r = \dot{\theta} b = 2b\omega \operatorname{Sen}.\theta/2$; donde: $\theta = \pi/2$

Por tanto: $V_r = 2b\omega . \operatorname{Sen}. \pi/4 \longrightarrow V_r = b\omega\sqrt{2}$ Resp.

236.—Desde una altura h se suelta una partícula situada a una latitud Norte. γ Deducir una expresión para la distancia s, comprendida entre el punto que proyecta sobre el suelo al soltarse y el punto en que la partícula toca el suelo. La resistencia del aire y el cuadrado de la velocidad angular de la Tierra (ω) son despreciables.



SOLUCION:

Como la partícula se halla próxima a la Tierra la ecuación de la aceleración relativa de P estará definida por:

$$a_p = a_o + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times [\omega \times (R + \rho)] + \ddot{\rho} + 2\omega \times V_r$$

$$\dot{\omega} \times \rho = 0 \longleftarrow \omega = \text{constante},$$

Puesto que ρ es pequeñísimo respecto a R (Radio de la Tierra) se afirma:

$$(R + \rho) \approx R$$

Por tanto:

$\omega \times [\omega \times (R + \rho)] \approx \omega \times [\omega \times R] \approx 0$ Puesto que está en función de ω^2 cuyo valor despreciamos por condición del problema.

$a_o = 0$ No se considera la Traslación de la Tierra.

Según el gráfico:

$$\omega = \omega\,[\operatorname{Sen}.\gamma K - \operatorname{Cos}.\gamma I]$$

$$\rho = X + Y + Z$$

Derivando $\dot{\rho} = \dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z}$

$$\ddot{\rho} = \ddot{X} + \ddot{Y} + \ddot{Z} \qquad \text{(A)}$$

Puesto que: $V_r = \dot{\rho}$

La ecuacion de la aceleración de Coriolis será:

$$2\omega \times \dot{\rho} = 2\omega\,[\operatorname{Sen}.\gamma K - \operatorname{Cos}.\gamma I] \times [\dot{X} I + \dot{Y} J + \dot{Z} K] \text{.....(B)}$$

Además, la ecuación del movimiento en P es:

$$\Sigma F = m a_p$$

Luego: $\Sigma F = -mg.K = m\,a_p = m[\bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \ddot{\rho} + 2\omega \times \dot{\rho}]$

Simplificando:

$$\ddot{\rho} = -gK - 2\omega \times \dot{\rho}$$

Reemplazando A y B

$$\ddot{X} + \ddot{Y} + \ddot{Z} = -gK - 2\omega[-\dot{Y}\,\text{Sen.}\gamma I + (\dot{Z}\,\text{Cos.}\gamma + \dot{X}\,\text{Sen.}\gamma)J - \dot{Y}\,\text{Cos.}\gamma K]$$

$$\ddot{X}I + \ddot{Y}J + \ddot{Z}K = 2\omega\dot{Y}\,\text{Sen}\,\gamma I - 2\omega[\dot{X}\,\text{Sen.}\gamma + \dot{Z}\,\text{Cos.}\gamma]J + [2\omega\dot{Y}\,\text{Cos.}\,\gamma - g]K$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

$\ddot{X} = 2\omega\dot{Y}\,\text{Sen.}\,\gamma$ .... (C)

$\ddot{Y} = -2\omega[\dot{X}\,\text{Sen.}\gamma + \dot{Z}\,\text{Cos.}\gamma]$ .... (D)

$\ddot{Z} = 2\omega\dot{Y}\,\text{Cos.}\gamma - g$ .... (E)

Integrando las ecuaciones C y E respecto al tiempo:

$$\int \ddot{X} = \dot{X} = \int 2\omega\,\text{Sen.}\,\gamma\dot{Y} = 2\omega\,\text{Sen.}\,\gamma Y + C_1$$

$$\int \ddot{Z} = \dot{Z} = \int [2\omega\,\text{Cos.}\,\gamma\dot{Y} - g] = 2\omega\,\text{Cos.}\,\gamma Y - gt + C_2$$

Para las condiciones iniciales: $X = Y = Z = 0$

$\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$

Luego: $C_1 = 0$; $C_2 = 0$

$\dot{X} = 2\omega Y\,\text{Sen.}\,\gamma$ .... (F)

$\dot{Z} = 2\omega Y\,\text{Cos.}\,\gamma - gt$ .... (G)

Reemplazando F y G en la ecuación D.

$$\ddot{Y} = -2[2\omega^2\,\text{Sen}^2\gamma Y + \omega\,\text{Cos.}\gamma(2\omega Y\,\text{Cos.}\gamma - gt)]$$

Simplificando, considerando que: $\omega^2 \approx 0$

$\ddot{Y} = 2\omega gt\,\text{Cos.}\,\gamma$

Integrando:

$$\dot{Y} = 2g\omega\,\text{Cos.}\gamma \int_0^t t\,dt = g\omega\,\text{Cos.}\,\gamma.t^2$$

$$Y = g\omega\,\text{Cos.}\gamma \int_0^t t^2dt = \frac{1}{3}g\omega\,\text{Cos.}\,\gamma t^3$$ .... (H)

Además según las ecuaciones (B) y [III] :

$$\dot{z} = 2\omega \text{ Cos. } \gamma \left(\frac{1}{3} \omega g . \text{Cos. } \gamma t^3 \right) - gt$$

$$\dot{z} = f(\omega^2) - gt = 0 - gt = -gt$$

Integrando: $z = -g \int_0^t t dt \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$

Para la partícula en mención: $\{ z = h \} \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

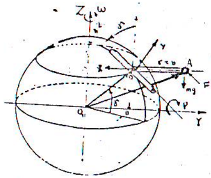
Reemplazando t en H:

$$Y = \frac{1}{3} . g\omega . \text{ Cos. } \gamma \left(\frac{2h}{g} \right) \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Finalmente puesto que: $Y = S$

$$S = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ Cos. } \gamma \text{ , Hacia el Este.}$$ Resp.

240.—Una partícula de masa m está adherida al brazo de longitud b , el cual rota con velocidad angular constante p en torno al eje horizontal de dirección Norte-Sur como se muestra. La velocidad angular de la Tierra es ω y su radio R. La partícula está situada a una latitud Norte γ . para estas condiciones calcular las componentes F_x , F_y , F_z de la fuerza total ejercida por el brazo sobre la partícula en el instante en que θ = 90º



SOLUCION:

La Ec. del movimiento que relaciona la aceleración, relativa al extremo A será:

$$a_A = a_0 + \dot{\omega} \times r + \omega \times [\omega \times r] + \ddot{r} + 2\omega \times V_r \text{ .... } A$$

Analizando el gráfico se deduce :

Aceleración del punto base O.

$$a_0 = \omega \times [\omega \times R] + gJ =$$

$$\omega^2 [\text{ Cos } \gamma K + \text{ Sen } \gamma J] \times [(\text{Cos. } \gamma K + \text{ Sen. } \gamma J) \times RJ]$$

$$+ gJ$$

Por tanto:

$$a_0 = \omega^2 R\left[\text{ Sen. }\gamma\cdot\text{ Cos }\gamma K - \text{ Cos.}^2\gamma J\right] + gJ = \tfrac{1}{2}\omega^2 R\text{ Sen. }2\gamma K - \left[\omega^2 R\text{ Cos.}^2\gamma - g\right]J$$

$$\omega \times [\omega \times r] = \omega^2\left[\text{ Sen. }\gamma J + \text{ Cos. }\gamma K\right] \times \left[(\text{ Sen. }\gamma J + \text{ Cos }\gamma K) \times (-b\lambda)\right]$$

$$\omega \times [\omega \times r] = b\omega^2\left[\text{ Sen.}^2\gamma\lambda + \text{ Cos.}^2\gamma\lambda\right] = b\omega^2\lambda$$

Los términos: $\dot{\omega} \times r = \bar{0} \longrightarrow \omega = \text{constante.}$

$\ddot{P} = \bar{0} \longrightarrow P = \text{constante.}$

Aceleración de Coriolis:

$$2\omega \times V_r = 2\omega\left[\text{ Sen. }\gamma J + \text{ Cos }\gamma K\right] \times \left[PK \times (-b\lambda)\right]$$

$$2\omega \times V_r = 2\omega P b\text{ Cos. }\gamma\lambda$$

Aceleración relativa:

$$\ddot{r} = \dot{P} \times \mathbf{b} + P \times [P \times \mathbf{b}] = \bar{0} + PK \times [PK \times (-b\lambda)] = P^2 b\lambda$$

Reuniendo términos en la Ec. A:

$$a_A = \left[b\omega^2 + 2\omega P b\text{ Cos. }\gamma + P^2 b\right]\lambda + \left[g - \omega^2 R\text{ Cos.}^2\gamma\right]J + \frac{1}{2}R\omega^2\text{ Sen. }2\gamma K$$

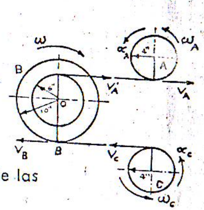
Las componentes de la fuerza **F** que actúa sobre la masa m será:

$$F_x = m a_x$$
$$F_y = m a_y$$
$$F_z = m a_z$$

Reemplazando los componentes de a_A:

$$F_x = mb\left[\omega^2 + P^2 + 2P\omega\text{ Cos. }\gamma\right]$$
$$F_y = m\left[g - R\omega^2\text{ Cos}^2\gamma\right]$$
$$F_z = \frac{1}{2}mR\omega^2\text{ Sen. }2\gamma$$

248.—Calcular la velocidad y aceleración angulares del tambor C en el instante en que la velocidad y aceleración angulares del tambor A son respectivamente 4 rad / Seg. y 3 rad./Seg.^{2} ambas en sentido anti-horario. El cable del tambor A está arrollado en el doble carrete B el cual gira sobre el árbol fijo O.



SOLUCION:

Según se observa en el gráfico los módulos de las velocidades $\mathbf{V_A}$ y $\mathbf{V_A'}$ son iguales:

Por lo tanto: $\quad [V_A = V_{A'}]$ ---------------- [I]

Similarmente: $\quad [V_B = V_C]$ ---------------- [II]

Tomando como eje instantáneo de rotación el eje del tambor mayor y considerando las afirmaciones I y II se obtiene:

$$\frac{V_{A'}}{r} = \frac{V_B}{R} \longrightarrow \frac{V_A}{6} = \frac{V_C}{10} \longrightarrow V_C = \frac{5V_A}{3} \quad [III]$$

Además:

$$V_A = \omega_A [r_A] \longrightarrow V_A = 4 \times 4 = 16 \text{ Pulg./Seg}$$

Según III:

$$V_C = \frac{5}{3}(16) = \frac{80}{3} \text{ Pulg./Seg}$$

Luego observando la figura se deduce:

$$V_C = \Omega_C (4) \longrightarrow \Omega_C = \frac{\frac{80}{3}}{4} \longrightarrow \Omega_C = 6.66 \text{ rad/seg}$$

Para calcular α_C asumimos las mismas afirmaciones anteriores, considerando las aceleraciones tangenciales de los tambóres. Por tanto:

$$[a_t]_A = [a_t]_{A'} \quad ; \quad [a_t]_B = [a_t]_C$$

En los puntos A y A' se cumple: Para las aceleraciones tangenciales

$$a_A = \alpha_A (r_A) \longrightarrow a_A = 3 \times 4 = 12 \text{ Pulg./Seg2.}$$

$$a_{A'} = \alpha_{A'} (r_{A'}) = a_A \longrightarrow \alpha_{A'} = \frac{12}{6} = 2 \text{ rad./Seg2.}$$

Para los puntos B y C: $\quad [\alpha_{A'} = \alpha_B]$

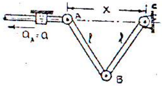
$$a_C = a_B = \alpha_B (r_B) = 2 \times 10 = 20 \text{ Pulg./Seg2.}$$

Por tanto según el mismo gráfico:

$$a_C = \alpha_C (r_C) \longrightarrow \alpha_C = \frac{20}{4}$$

$$\alpha_C = 5 \text{ rad./Seg2.} \qquad \text{Resp.}$$

249.—Cuando x es prácticamente cero el punto A parte del reposo con aceleración constante hacia la izquierda. Determinar la velocidad angular y aceleración angular del eslabón AB en función de x .



SOLUCION:

Del gráfico se deduce:

$$X = 2\ell \cdot \text{Cos.}\,\theta \longrightarrow \text{Cos.}\,\theta = \frac{X}{2\ell} \text{ -------- [I]}$$

Derivando: $\dot{X} = -2\ell\dot{\theta}\cdot\text{Sen.}\,\theta$ ------------------------- [II]

$$\ddot{X} = -2\ell\ddot{\theta}\ \text{Sen.}\,\theta - 2\ell(\dot{\theta})^2\ \text{Cos.}\,\theta \text{ ----------- [III]}$$

Donde: $\dot{X} = V_A \quad ; \quad \dot{\theta} = \Omega$

$\ddot{X} = a \quad ; \quad \ddot{\theta} = \alpha$ --------- [IV]

Además: $[V.dV = a.dX]$

$$\int_0^{V_A} VdV = a\int_0^{X} dX \longrightarrow V_A = \sqrt{2aX} \text{ --------- [A]}$$

De I: $\text{Sen.}\,\theta = \sqrt{1 - \text{Cos.}^2\,\theta} = \sqrt{1 - \frac{X^2}{4\ell^2}} = \frac{\sqrt{4\ell^2 - X^2}}{2\ell}$ [B]

Reemplazando A, B y IV en II :

$$\Omega = -\frac{\sqrt{2aX}}{2\ell\left(\frac{\sqrt{4\ell^2 - X^2}}{2\ell}\right)} \longrightarrow \Omega = -\sqrt{\frac{2aX}{4\ell^2 - X^2}}$$

Resp.

Reemplazando I, IV, A y B en la ecuación II :

$$a = -2\ell\left(\frac{2aX}{4\ell^2 - X^2}\right)\frac{X}{2\ell} - 2\ell\alpha\left(\frac{\sqrt{4\ell^2 - X^2}}{2\ell}\right)$$

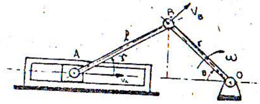
$$a = -\frac{2aX^2 + \alpha(4\ell^2 - X^2)^{3/2}}{4\ell^2 - X^2}$$

Luego: $$\alpha = \frac{-4a\ell^2 + aX^2 - 2aX^2}{[4\ell^2 - X^2]^{3/2}}$$

Finalmente: $$\alpha = -\frac{a[4\ell^2 + X^2]}{[4\ell^2 - X^2]^{3/2}}$$

Resp.

250.—Para el mecanismo deslizador manibela mostrado, determinar la velocidad angular y aceleración angular de la biela AB en función de θ, si la manibela OB tiene velocidad angular constante ω en sentido horario. Tómese para la velocidad y aceleración buscadas el sentido antihorario como positivo.



SOLUCION:

Del gráfico se deduce:

$$\frac{r}{\operatorname{Sen}\gamma} = \frac{\ell}{\operatorname{Sen}\theta} \qquad \text{[I]}$$

Luego:

$$\gamma = \text{arco Sen.}\left[\frac{r\operatorname{Sen}\theta}{\ell}\right]$$

Derivando:

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{r}{\ell}\operatorname{Cos}\theta.\dot{\theta}}{\sqrt{1-\left[\frac{r\operatorname{Sen}\theta}{\ell}\right]^2}} = \Omega \qquad \text{Donde } \dot{\theta} = \omega$$

Finalmente :

$$\Omega = \frac{r\omega}{\ell}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\theta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\operatorname{Sen}^2\theta}}$$

Cálculo de α.

Reemplazando Sen θ en la expresión anterior según [I] se obtiene:

$$\Omega = \frac{r\omega}{\ell}\cdot\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sec}.\gamma \qquad \text{[II]}$$

Derivando [II]

$$\alpha = \dot{\Omega} = \frac{r\omega}{\ell}\left[\operatorname{Cos}.\theta.\operatorname{Sec}.\gamma.\operatorname{tg}\gamma\ \dot{\gamma} - \operatorname{Sen}.\theta.\dot{\theta}.\operatorname{Sec}.\gamma\right]$$

Reemplazando valores y simplificando, considerando según el gráfico que: $\dot{\gamma} = \Omega$

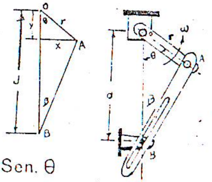
$$\operatorname{Cos}.\gamma = \sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\operatorname{Sen}^2\theta}$$

se deduce :

$$\alpha = \frac{r\omega^2}{\ell}\cdot\operatorname{Sen}\theta\,\frac{\frac{r^2}{\ell^2}-1}{\left[1-\frac{r^2}{\ell^2}\operatorname{Sen}^2\theta\right]^{3/2}}$$

Resp.

251.—El eslabón OA mostrado gira en sentido antihorario con velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Determinar la expresión de la velocidad angular de la barra AC en función de θ.



SOLUCION:

Observando la figura se deduce:

$$Y = r \operatorname{Cos.} \theta \quad ; \quad X = r \operatorname{Sen.} \theta$$

$$\operatorname{tg.} \beta = \frac{x}{d - y} = \frac{r. \operatorname{Sen.} \theta}{d - r \operatorname{Cos.} \theta} \quad \text{.................................} \quad \text{(I)}$$

Derivando I :

$$\dot{\beta}. \operatorname{Sec.}^2 \beta = \frac{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]\, r\dot{\theta} \operatorname{Cos} \theta - r \operatorname{Sen.} \theta [r\dot{\theta} \operatorname{Sen.} \theta]}{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2}$$

$$\dot{\beta} \cdot \operatorname{Sec.}^2 \beta = \frac{dr\dot{\theta} \operatorname{Cos.} \theta - r^2\dot{\theta}}{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2} = \frac{r\dot{\theta}[d \operatorname{Cos.} \theta - r]}{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2}$$

Reemplazando : $\dot{\theta} = \omega$ [dato]
$\dot{\beta} = \Omega_{AC}$ [Ver gráfico]

Se afirma:

$$\Omega_{AC} = \frac{r\omega [d \operatorname{Cos.} \theta - r]}{\operatorname{Sec.}^2 \beta [d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2} \quad \text{.................................} \quad \text{(II)}$$

Considerando la ecuación I se deduce:

$$\operatorname{Sec}^2. \beta = 1 + \operatorname{tg.}^2 \beta = 1 + \left[\frac{r \operatorname{Sen.} \theta}{d - r \operatorname{Cos.} \theta}\right]^2$$

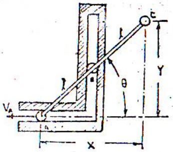
$$\operatorname{Sec}^2 \beta = \frac{d^2 - 2rd \operatorname{Cos.} \theta + r^2 . \operatorname{Cos}^2 \theta + r^2 \operatorname{Sen.}^2 \theta}{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2}$$

$$\operatorname{Sec}^2 \beta = \frac{d^2 - 2rd \operatorname{Cos.} \theta + r^2}{[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2} \quad \text{.................................} \quad \text{(III)}$$

Finalmente reemplazando la ecuación III en II y Simplificando, $[d - r \operatorname{Cos.} \theta]^2$ se obtiene:

$$\Omega_{AC} = r\omega \frac{d. \operatorname{Cos.} \theta - r}{d^2 - 2dr. \operatorname{Cos.} \theta + r^2} \quad \text{.......................} \quad \text{Resp.}$$

235.—El punto A situado en el extremo del eslabón guiado AC tiene una velocidad constante V_A durante un corto intervalo de su movimiento. Para este instante determinar la aceleración del punto C en función de θ.



SOLUCION:

En la figura se observa:

$$Y = 2\ell \,.\, \text{Sen}.\theta$$

Derivando:

$$\dot{Y} = 2\ell \,.\, \text{Cos}.\theta.\dot{\theta}$$

$$\ddot{Y} = 2\ell\left[\ddot{\theta}\,\text{Cos}.\theta - \dot{\theta}^2.\text{Sen}.\theta\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[I]}$$

Además en la misma figura:

$$X = \ell \,.\, \text{Cos}.\theta$$

Derivando:

$$\dot{X} = -\ell \,.\, \text{Sen}.\theta.\dot{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[II]}$$

$$\ddot{X} = -\ell\left[\ddot{\theta}\,\text{Sen}.\theta + \dot{\theta}^2\,\text{Cos}.\theta\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[III]}$$

Según el enunciado:

$$\dot{X} = V_A = \text{constante} \longrightarrow \ddot{X} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[A]}$$

Según las ecuaciones [II] y [A].

$$\dot{\theta} = -\frac{V_A}{\ell.\text{Sen}.\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[B]}$$

$$\text{[III]} = 0$$

Reemplazando en [III] :

$$\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2.\text{Cot}\,\theta = -\frac{V_A^2.\,\text{Cos}.\theta}{\ell^2\ \text{Sen}^3\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[C]}$$

Reemplazando B y C en la ecuación I .

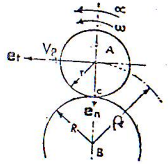
$$\ddot{Y} = -2\,\ell\left[\frac{V_A^2.\,\text{Cos}^2\theta}{\ell^2.\,\text{Sen}^3\theta} + \frac{V_A^2}{\ell^2\text{Sen}\,\theta}\right]$$

$$\ddot{Y} = -\frac{2V_A^2}{\ell\text{Sen}^3\theta}\left[\text{Cos}^2\theta + \text{Sen}^2.\,\theta\right]$$

Finalmente considerando que: $\ddot{Y} = a_C$ [Según A]

$$a_C = \frac{2\,V_A^2}{\ell\ \text{Sen}^3\theta}$$ {dirigida hacia el centro.} Resp

262.—Hallar la expresión de la aceleración del centro instantáneo C del disco que rueda sobre la superficie circular, siendo V_P la velocidad lineal constante de su centro O.



SOLUCION:

Según el gráfico: $\rho = r + R$, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_n$, $\mathbf{V}_P = V_P \mathbf{e}_t$ .... [A]

Además; C pertenece al disco móvil A.

D pertenece al cuerpo fijo B.

Por tanto: $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_D + \mathbf{V}_{C/D} = \bar{0} + \bar{0} \longrightarrow V_C = 0$ [centro instantáneo]

$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{P/C} = \bar{0} - \omega_A \mathbf{K} \times (-r\mathbf{e}_n) \longrightarrow V_P = \omega_A \cdot r$ [I]

Puesto que se ha deducido que C es centro instatáneo de rotación, la aceleración tangencial de dicho punto será cero. O sea:

$\mathbf{a}_c = [\mathbf{a}_c]_n + [\mathbf{a}_c]_t \longrightarrow \mathbf{a}_c = [\mathbf{a}_c]_n$ [B]

Las aceleraciones de P y C están relacionadas por la ecuación:

$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_{p/c} \longrightarrow [\mathbf{a}_c]_n = [\mathbf{a}_p]_n - [\mathbf{a}_{p/c}]_n$

Y según la afirmación (A): $\longrightarrow \mathbf{a}_c = [\mathbf{a}_p]_n - [\mathbf{a}_{p/c}]_n$ [C]

La aceleración normal de P según la ecuación (A) es:

$$[\mathbf{a}_p]_n = \frac{V_p^2}{\rho}\,\mathbf{e}_n = \frac{V_p^2}{R+r}\,\mathbf{e}_n \quad \text{..............} \quad [II]$$

Y la aceleración normal de P respecto a C será: {Ver gráfico}

$$[\mathbf{a}_{p/c}]_n = \frac{V_p^2}{r}\,\mathbf{e}_n \quad \text{..............} \quad [III]$$

Sustituyendo las ecuaciones II y III en (C) se obtiene:

$$\mathbf{a}_c = \left[\frac{V_p^2}{r+R} - \frac{V_p^2}{r}\right]\mathbf{e}_n \longrightarrow \mathbf{a}_c = -V_p^2 \frac{R}{r(r+R)}\,\mathbf{e}_n$$

Según se observa en el gráfico el signo negativo significa que la aceleración de C se dirige de C hacia P {Centro del disco movil}

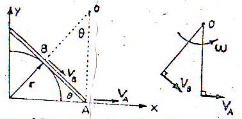
Por lo tanto el módulo sera:

$$a_c = V_p^2 \frac{R}{r(r+R)} \quad \text{Resp.}$$

En función de la velocidad angular del disco, según la ecuación (I) quedará expresada por:

$$a_c = \omega_A^2 \frac{rR}{(r+R)} \quad \text{Resp.}$$

259.—Haciendo un análisis gráfico de la velocidad relativa, calcular la velocidad angular de la barra delgada en la posición mostrada sabiendo que: $\theta = 30°$, $V_A = 4$ pies/Seg. y $r = 8$ Pulg.



SOLUCION:

Método de centro Instantáneo de rotación o Polo de Velocidad

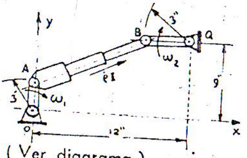
Por cálculos geométricos se deduce: $AO = 16\sqrt{3}$

Se observa que el centro Instantaneo de rotación es O. Por tanto:

$$\omega_{BA} = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_B}{OB} \longrightarrow \omega_{BA} = \frac{V_A}{AO} = \frac{4 \times 12}{16\sqrt{3}}$$

$$\omega_{BA} = \sqrt{3} \text{ rad / Seg.} \quad \text{Resp.}$$

266.—Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la barra telescópica en el instante mostrado. Las velocidades angulares de los eslabones de entrada y salida se indican en el gráfico.



SOLUCION:

Por condiciones del problema se afirma: (Ver diagrama)

$r_1 = OA = 3J$ Pulg. $\qquad \omega_1 = -4K$ rad./Seg (Constante)

$r_2 = QB = -3\lambda$ Pulg $\qquad \omega_2 = -2K$ rad./Seg (Constante)

$\rho = AB = 9\lambda + 6J \qquad \mathbf{I} = \dfrac{\rho}{|\rho|} = \dfrac{9\lambda + 6J}{\sqrt{81 + 36}} = (3\lambda + 2J)/\sqrt{13}$

Las velocidades absolutas de A y B respectivamente son:

$V_A = \omega_1 \times r_1 = -4K \times 3J = 12\lambda$ Pulg./Seg.

$V_B = \omega_2 \times r_2 = -2K \times (-3\lambda) = 6J$ Pulg./Seg

Puesto que el vector ρ (**AB**) varía en magnitud y dirección la ecuacion de velocidades relativas entre A y B será:

$$V_B = V_A + V_{B/A} + \dot{\rho} = V_A + \Omega_{AB} \times \rho + \dot{\rho}\mathbf{I} \qquad \text{[A]}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$6J = 12\lambda + \Omega_{AB}K \times (9\lambda + 6J) + \dot{\rho}(3\lambda + 2J)/\sqrt{13}$$

$$6J = (12 - 6\Omega_{AB} + 3\dot{\rho}/\sqrt{13})\lambda + (9\Omega_{AB} + 2\dot{\rho}/\sqrt{13})J$$

Comparando módulos de componentes iguales se deduce.

$$0 = 12 - 6\Omega_{AB} + 3\dot{\rho}/\sqrt{13} \longrightarrow -6\dot{\rho}/\sqrt{13} + 12\Omega_{AB} - 24 = 0$$

$$6 = 9\Omega_{AB} + 2\dot{\rho}/\sqrt{13} \longrightarrow 6\dot{\rho}/\sqrt{13} + 27\Omega_{AB} - 18 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\boxed{\dot{\rho} = -6.73 \text{ Pulg./Seg}} \qquad \boxed{\Omega_{AB} = 1.08 \text{ rad./Seg. Sentido antihorario}}$$

Derivando la ecuación (A) y agregando la aceleración de Coriolis por efecto de la variación de ρ se obtiene la ecuación de aceleraciones relativas de A y B:

$$a_B = a_A + \alpha_{AB} \times \rho - \Omega_{AB}^2\rho + \ddot{\rho} + 2\Omega_{AB} \times \dot{\rho} \text{ ---------[B]}$$

Donde según el gráfico y datos se deduce:

$$a_A = a_t + a_n = \bar{0} - \omega_1^2 . r_1 = -(4)^2(3J) = -48J \qquad [III]$$

$$a_B = a_t + a_n = \bar{0} - \omega_2^2 r_2 = -(2)^2(-3\lambda) = 12\lambda \qquad [IV]$$

$$\alpha_{AB} \times \rho = \alpha_{AB}K \times (9\lambda + 6J) = 9\alpha_{AB}J - 6\alpha_{AB}\lambda \qquad [V]$$

$$-\Omega_{AB}^2\rho = -(1.08)^2(9\lambda + 6J) = -10.5\lambda - 7J \text{ Pulg./Seg2.} \qquad [VI]$$

$$\ddot{\rho} = \ddot{\rho}(3\lambda + 2J)/\sqrt{13} = 3\ddot{\rho}/\sqrt{13}\lambda + 2\ddot{\rho}/\sqrt{13}J \qquad [VII]$$

$$2\Omega_{AB} \times \dot{\rho} = 2(1.08)K \times (-6.73)(3\lambda + 2J)/\sqrt{13} =$$

$$= 8.08\lambda - 12.15J \qquad [VIII]$$

Sustituyendo las ecuaciones III, IV, V, VI, VII y VIII en (B) y ordenando términos se deduce:

$$12\lambda = (8.08 + 3\ddot{\rho}/\sqrt{13} - 10.5 - 6\alpha_{AB})\lambda - (12.15 - 2\ddot{\rho}/\sqrt{13} +$$

$$7 - 9\alpha_{AB} + 48)J$$

Comparando módulos de las componentes x e y se deduce:

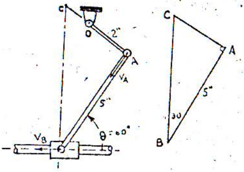
$$12 = 8.08 + 3\ddot{\rho}/\sqrt{13} - 10.5 - 6\alpha_{AB} \longrightarrow 6\ddot{\rho}/\sqrt{13} - 12\alpha_{AB} - 28.84 = 0$$

$$0 = 12.15 - 2\ddot{\rho}/\sqrt{13} + 55 - 9\alpha_{AB} \longrightarrow -6\ddot{\rho}/\sqrt{13} - 27\alpha_{AB} + 201.44 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$\alpha_{AB} = 4.42$ rad./Seg2. Resp.
Sentido antihorario

267.—El collar deslizante B tiene velocidad constante de 20 Pulg./Seg. para un corto intervalo de su movimiento sobre el eje fijo horizontal mostrado. Cuando el eslabón OA es perpendicular a AB , el valor del ángulo θ es de 60°. Determinar la aceleración angular de AB para estas condiciones.



SOLUCION:

Del diagrama se deduce:

$CB/\text{Sen. } 90° = 5/\text{Sen. } 60° \longrightarrow CB = 10\sqrt{3}/3$ Pulg.

$CB.\text{Sen. } 30° = CA \longrightarrow CA = 5\sqrt{3}/3$ Pulg.

C es centro instantáneo o polo de velocidades. Por tanto:

$$\Omega_{BA} = \frac{V_B}{CB} = \frac{V_A}{CA} \quad \begin{cases} \Omega_{BA} = 20 \times 3/10\sqrt{3} \longrightarrow \Omega_{BA} = 2\sqrt{3} \ \text{rad./Seg} \\ V_A = (2\sqrt{3})\, 5\sqrt{3}/3 \longrightarrow V_A = 10 \ \text{Pulg./Seg.} \end{cases}$$

Además:

$$V_A = \Omega_{OA} \times 2 \longrightarrow \Omega_{OA} = 5 \ \text{rad./Seg}$$

La aceleración relativa entre A y B está definida por la ecuación:

$$a_B = a_A + \alpha_{AB} \times AB - \Omega^2_{BA}.AB \qquad \text{Donde: ....} \quad [I]$$

(A) ...... $a_B = \bar{0} \quad \{ V_B \text{ es constante} \}$

$a_A = \alpha_{OA} \times OA - \Omega^2_{OA}OA = \alpha_{OA}K \times (\sqrt{3}i - J) - 5^2(\sqrt{3}i - J)$

(B) ----- $a_A = (\alpha_{OA} - 25\sqrt{3})i + (\sqrt{3}\alpha_{OA} + 25)J$

(C) ----- $\alpha_{AB} \times AB = \alpha_{AB}K \times \frac{5}{2}(-i - \sqrt{3}J) = -\frac{5}{2}\alpha_{AB}J + \frac{5\sqrt{3}}{2}\alpha_{AB}i$

(D) ----- $\Omega^2_{BA}.BA = (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{5}{2}(-i - \sqrt{3}J) = -30(i + \sqrt{3}J)$

Sustituyendo las ecuaciones A, B, C D en [I] se obtiene:

$$\bar{0} = \left[\alpha_{OA} - 25\sqrt{3} + (5\sqrt{3}/2)\alpha_{AB} + 30\right] i + \left[\sqrt{3}\alpha_{OA} + 25 - (5/2)\alpha_{AB} + 30\sqrt{3}\right] J$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

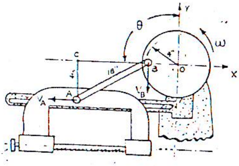
$$\alpha_{OA} - 25\sqrt{3} + (5\sqrt{3}/2)\alpha_{AB} + 30 = 0$$

$$\sqrt{3}\alpha_{OA} + 25 - (5/2)\alpha_{AB} + 30\sqrt{3} = 0$$

Resolviendo estas 2 ecuaciones se obtiene:

$$\alpha_{AB} = 10 \quad \text{rad./Seg2.}$$ Resp.

268.—La hoja cortante de la sierra mecánica mostrada está montada en una armadura que desliza a lo largo de la guía horizontal. Si el motor hace girar al volante a una velocidad angular constante ω de 60 R.P.M. en sentido antihorario, calcular la aceleración de la hoja cuando $\theta = 90°$. Calcular también la aceleración angular correspondiente de la barra de trasmisión AB.'



SOLUCION:

Por condiciones del problema: $\theta = 90°$, $\omega = 60(2\pi/60) = 2\pi$ rad./Seg

Además : $V_B = \omega r = 2\pi(4) \longrightarrow V_B = 8\pi$ Pulg./Seg

Se observa en el diagrama que el centro instantáneo o polo de velocidades está en el punto C . Por lo tanto:

$$\Omega_{BA} = \frac{V_B}{CB} = \frac{8\pi}{\sqrt{18^2 - 4^2}} \longrightarrow \Omega_{BA} = \frac{4\pi}{\sqrt{77}} \text{ rad./Seg} \qquad [I]$$

Las aceleraciones de A y B están relacionadas por la ecuación:

$$a_A = a_B + a_{A/B} = a_B + \dot{\Omega}_{BA} \times BA + \Omega_{BA} \times (\Omega_{BA} \times BA) \quad (A)$$

Puesto que O es fijo y ω constante se afirma: $\{\dot{\omega} = 0\}$

$$a_B = a_t + a_n = \bar{0} - \omega^2 r = -(2\pi)^2(-4\,i) = 16\pi^2 i \qquad [II]$$

$$a_A = -a_A\, i \;;\quad \dot{\Omega}_{BA} = \alpha_{BA} K \;;\quad BA = -(2\sqrt{77}\, i + 4J) \qquad [III]$$

Además: $\Omega_{BA} \times (\Omega_{BA} \times BA) = -\Omega_{BA}^2 BA \quad [\Omega_{BA} \perp BA] \qquad [IV]$

Sustituyendo las ecuaciones I , II , III , IV , en A se obtiene:

$$-a_A i = 16\pi^2 i - \alpha_{BA} K \times (2\sqrt{77}\, i + 4J) + (4\pi/\sqrt{77})^2 (2\sqrt{77}\, i + 4J)$$

$$-a_A i = (16\pi^2 + 4\alpha_{BA} + 32\pi^2/\sqrt{77})\, i + (64\pi^2/77 - 2\alpha_{BA}\sqrt{77})\, J$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección :

$$-a_A = 16\pi^2 + 4\alpha_{BA} + 32\pi^2/\sqrt{77} \quad \text{-----------------} \quad (1)$$

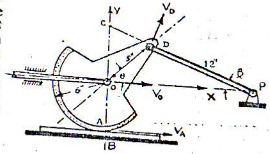
$$0 = 64\pi^2/77 - 2\alpha_{BA}\sqrt{77} \quad \text{-----------------} \quad (2)$$

Desarrollando el sistema 1 y 2 se obtiene:

$$a_A = -195.87 \text{ Pulg./Seg2.} \longrightarrow -a_A = 16.32 \text{ pies/Seg2.}$$

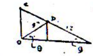
$$\alpha_{BA} = 0.467 \text{ rad./Seg2.} \qquad \text{Resp.}$$

270.—El dispositivo mostrado es utilizado para probar la resistencia al desgaste de los materiales A y B. Si la barra EC tiene una velocidad de 4 pies/seg. y una aceleración de 6 pies/seg.[2] ambas hacia la derecha cuando $\theta = 45°$, determinar la velocidad de frotamiento de A, la razón de cambio en unidad de tiempo de dicha velocidad y las aceleraciones angulares de los eslabones DP y DO.



SOLUCION:

Por condición del problema y según la ley de senos:



$V_o = 4\,i$ pies/Seg

$a_o = 6\,i$ pies/Seg2.

$$\frac{12}{\text{Sen. }45} = \frac{5}{\text{Sen. }\beta} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Sen. }\beta = 0.294 \\ \text{Cos. }\beta = 0.955\end{array}$$

El centro instantáneo, polo de velocidades de O y D es C. Luego:

$$\Omega_{OD} = \Omega_{AO} = \frac{V_O}{CO} = \frac{V_D}{CD} \qquad [\,OD \text{ y } AO \in AOD\,]$$

Mediante cálculos elementales del gráfico se deduce:

$CO = 4.624$ Pulg. $\qquad CD = 3.69$ Pulg.

Por tanto: $\quad \Omega_{AO} = V_O/CO = 4(12)/4.624 \longrightarrow \Omega_{AO} = 10.38$ rad./Seg

$$V_D = \Omega_{AO} CD = 10.38(3.69) \longrightarrow V_D = 38.4 \text{ Pulg./Seg}$$

Pero: $\quad V_D = \Omega_{PD} \cdot DP = 12\,\Omega_{PD} \longrightarrow \Omega_{PD} = 3.2$ rad./Seg

Las velocidades de O y A están relacionadas por la ecuación:

$$V_A = V_O + V_{A/O} = V_O\,i + \Omega_{AO} \times OA$$

$$V_A = 4i + 10.38K \times \left(-\frac{6}{12}\right)J = (4 + 5.19)\,i$$

$V_A = 9.19$ pies/Seg

Las aceleraciones de O y D están relacionadas por la ecuación:

$$a_D = a_O + a_{D/O} = a_O\imath + \dot{\Omega}_{OD} \times \mathbf{OD} - \Omega_{OD}^2 \cdot \mathbf{OD}$$

$$[\ \Omega_{OD} \perp OD\ ]$$

Dando Valores: $a_D = 6\,\imath + \dot{\Omega}_{OD}K \times \left[\frac{5}{12}(\mathrm{Cos.}\,45\,\imath + \mathrm{Sen.}\,45\,J)\right]$

$$-\ (10.38)^2 \left[\frac{5}{12}(\mathrm{Cos.}\,45\,\imath + \mathrm{Sen.}\,45\,J)\right]$$

[I] .... $a_D = -(25.62 + 0.295\dot{\Omega}_{OD})\,\imath + (0.295\dot{\Omega}_{OD} - 31.62)\,J$

Además otro valor de $\mathbf{a_D}$ se deduce respecto al punto P. O sea :

$$a_D = a_t + a_n = \dot{\Omega}_{PD} \times PD - \Omega_{PD}^2\, PD$$

Dando Valores: $a_D = \dot{\Omega}_{PD}K \times \left[\frac{12}{12}(\mathrm{Sen.}\,\beta J - \mathrm{Cos}\,\beta\,\imath)\right] -$

$$-\ (3.2)^2\left[\frac{12}{12}(\mathrm{Sen.}\,\beta J - \mathrm{Cos.}\,\beta\,\imath)\right] \text{ pies/Seg2.}$$

[II] .... $a_D = \left[9.75 - 0.294\,\dot{\Omega}_{PD}\right]\imath - \left[3.02 + 0.955\,\dot{\Omega}_{PD}\right]J$

Igualando módulos de las direcciones x, y, z en I y II

$$-\ 25.62 - 0.295\dot{\Omega}_{OD} = 9.75 - 0.294\dot{\Omega}_{PD}$$

$$-\ 31.62 + 0.295\dot{\Omega}_{OD} = -3.02 - 0.955\dot{\Omega}_{PD}$$

De estas ecuaciones se obtiene: $\dot{\Omega}_{OD} = \dot{\Omega}_{OA} = -\ 68.6$ rad./Seg2.

Las aceleraciones de O y A están relacionadas por la ecuación:

$$a_A = a_O + a_{A/O} = a_O\imath + \dot{\Omega}_{OA} \times OA - \Omega_{OA}^2\, OA =$$

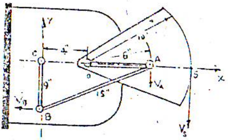
$$6\,\imath + 68.6K \times \left(-\frac{6}{12}\right)J + (10.38)^2\left(\frac{6}{12}\right)J$$

$a_A = -28.3\,\imath + 53.5\,J \longrightarrow a_y = 53.5$ pies/Seg2.

$a_x = -28.3$ pies/Seg2.

Resp.

272.—La banda de acero S adherida a la superficie del sector circular se mueve con velocidad constante hacia abajo a razón de 2 pies/Seg., durante un periodo de su movimiento en las proximidades de la posición mostrada en la cual OA es horizontal. Para este instante calcular la aceleración angular del eslabón CB.



SOLUCION:

Considerando que O y C son polos de velocidad, {Centros instantaneos} de S, A y A, B respectivamente se deduce:

$$\frac{V_A}{8} = \frac{V_s}{10} = \Omega_{os} \longrightarrow V_A = \frac{4}{5}V_s = \frac{4}{5}(2 \times 12) = 19.2 \text{ Pulg./Seg}$$

$$\Omega_{os} = V_s/10 = 2 \times 12/10 = 2.4 \text{ rad./Seg} \ \{\text{constante}\} \quad (I)$$

$$\frac{V_A}{12} = \frac{V_B}{9} = \Omega_{BA} \longrightarrow \Omega_{BA} = \Omega_{CB} = \frac{V_A}{12} = 1.6 \text{ rad./Seg} \ \text{---} (II)$$

Para el movimiento de B relativo a A se cumple la ecuación:

$a_B = a_A + a_{B/A}$, donde según I y II: ------------ (A)

$$a_A = a_t + a_n = \bar{0} - \Omega_{os}^2 OA = -(2.4)^2 8\imath = -46.08\imath \text{ Pulg./Seg2.}$$

$$a_B = \dot{\Omega}_{CB} \times CB - \Omega_{CB}^2 CB = \dot{\Omega}_{CB} K \times (-9J) - (1.6)^2(-9J) =$$

$$9\dot{\Omega}_{CB}\imath + 23.04 J \text{ Pulg./Seg2.}$$

$$a_{B/A} = \dot{\Omega}_{AB} \times AB - \Omega_{AB}^2 AB = \alpha_{AB} K \times (-12\imath - 9J) -$$

$$(1.6)^2(-12\imath - 9J)$$

$$a_{B/A} = (9\alpha_{AB} + 30.72)\imath - (12\alpha_{AB} - 23.04)J \text{ Pulg./Seg2.}$$

Sustituyendo en la ecuación A los valores deducidos:

$$9\dot{\Omega}_{CB}\imath + 23.04 J = (9\alpha_{AB} + 30.72 - 46.08)\imath -$$

$$(12\alpha_{AB} - 23.04)J$$

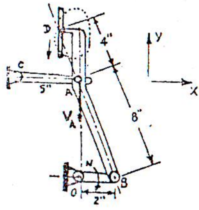
Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

$$23.04 = -12\alpha_{AB} + 23.04 \longrightarrow \dot{\Omega}_{AB} = 0 \text{ rad./Seg2.}$$

$$9\dot{\Omega}_{CB} = 9\alpha_{AB} - 15.36 \longrightarrow \dot{\Omega}_{CB} = 1.71 \text{ rad./Seg2.}$$

{sentido antihorario} Resp.

273.—El mecanismo mostrado acciona la cinta perforada F mediante la barra de conexión DAB que a su vez es impulsada por el eslabón OB, el cual gira con velocidad angular constante de 120 R.P.M. en sentido horario. La trayectoria de la uña D está representada por la línea de trazos. Para el instante representado calcular la aceleración de D para el cual los eslabones CA y OB son horizontales.



SOLUCION:

Por transformación se obtiene: $N = 120\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 4\pi$ rad./Seg

Las velocidades de A y B están relacionadas por la ecuación:

[I] $V_A = V_B + V_{A/B}$ Donde:

$$V_A = -V_A J$$

$$V_B = N \times OB = -4\pi K \times 2\lambda = -8\pi J$$

$$V_{A/B} = \Omega_{BA} \times BA = \Omega_{BA} K \times (2\sqrt{15} J - 2\lambda) =$$

$$= -\Omega_{BA} \cdot [2J + 2\sqrt{15}\,\lambda]$$

Sustituyendo los valores deducidos, en la ecuación I:

$-V_A J = -2\sqrt{15}\,\Omega_{BA}\lambda - (8\pi + 2\Omega_{BA})J$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

$0 = -2\sqrt{15}\,\Omega_{BA} \longrightarrow \Omega_{BA} = 0$ rad./Seg [A]

$V_A = 8\pi + 2\Omega_{BA} \longrightarrow V_A = 8\pi$ Pulg./Seg

Pero: $V_A = \Omega_{CA} CA = 5\Omega_{CA} \longrightarrow \Omega_{CA} = 8\pi/5$ rad./Seg

Cálculo de $\alpha_{AB} = \alpha_{AD}$ a partir de la ecuación:

[II] $a_A = a_B + a_{A/B} = a_B + \alpha_{BA} \times BA - \Omega_{BA}^2 \cdot BA$

donde: $a_B = \dot{N} \times OB - N^2 OB = \bar{0} - (4\pi)^2 2\lambda =$

$$-32\pi^2 \lambda \text{ Pulg./Seg2.} \quad \{N = \text{constante}\}$$

$$a_A = \dot{\Omega}_{CA} \times CA - \Omega_{CA}^2 CA = \dot{\Omega}_{CA} K \times 5\lambda - (8\pi/5)^2 5\lambda =$$

$$5\dot{\Omega}_{CA}J - 12.8\pi^2\lambda \text{ Pulg./Seg2.}$$

[III] $\quad \alpha_{BA} \times BA = \alpha_{BA}K \times (2\sqrt{15}J - 2\lambda) = -(2\sqrt{15}\alpha_{BA}\lambda + 2\alpha_{BA}J)$

$\quad \Omega^2_{BA}.BA = \bar{0} \qquad$ (Ecuación [A])

Sustituyendo en la ecuación II los valores deducidos:

$$5\dot{\Omega}_{CA}J - 12.8\pi^2\lambda = -2\alpha_{BA}J - (2\sqrt{15}\alpha_{BA} + 32\pi^2)\lambda$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección:

$$\left.\begin{array}{l} 5\dot{\Omega}_{CA} = -2\alpha_{BA} \\ -12.8\pi^2 = -2\sqrt{15}\alpha_{BA} - 32\pi^2 \end{array}\right\} \qquad \alpha_{BA} = -24.4 \text{ rad./Seg2.}$$

Luego a_D se calcula a partir de la ecuación:

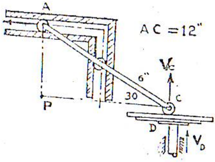
$$a_D = a_B + a_{D/B} = a_B + \alpha_{BA} \times BD - \bar{0} \left\{\text{Según Ec.[III]}\right\}$$

$$a_D = -32\pi^2\lambda + (-24.4)K \times 12(\text{Sen. }\theta J - \text{Cos. }\theta\lambda) =$$

$$= 73.2J - 31.5\lambda \quad \text{Pulg./Seg2.}$$

$$a_D = \sqrt{[73.2]^2 + [31.5]^2} \longrightarrow a_D = 79.9 \text{ Pulg./Seg2.}$$

274.—La guía D tiene una aceleración hacia arriba de 4 pies/Seg.². Calcular la velocidad angular y aceleración angular de AC en el instante para el cual la barra de conexión pasa por la posición $\theta = 30°$ y la guía tiene una velocidad hacia arriba de 2 pies/Seg. Comparar los análisis del movimiento absoluto y relativo



SOLUCION:

La velocidad vertical de C es igual a V_D, en consecuencia considerando además que P es centro instantaneo de V_A y V_C se afirma:

$$\frac{V_C}{PC} = \frac{V_A}{PA} = \Omega_{AC} \longrightarrow \Omega_{AC} = \frac{V_D}{PC} = \frac{2 \times 12}{12 \text{ Cos.}30}$$

$$\longrightarrow \Omega_{AC} = 2.31 \text{ rad./Seg}$$

La aceleración de A respecto a C está definida por la ecuación

$$[I]\quad a_A = a_C + a_{A/C} = a_C + \alpha \times CA - \Omega_{CA}^2 CA \quad [\Omega_{CA} \perp CA]$$

Donde: $a_C = a_C J = 4 \times 12 J$ Pulg./Seg2.

$$\alpha \times CA = \alpha K \times 12(\text{Sen. } 30 J - \text{Cos. } 30 \lambda)$$

$$= -6\alpha\lambda - 6\sqrt{3}\alpha J \quad \text{Pulg./Seg2.}$$

$$-\Omega_{CA}^2 \cdot CA = -(2.31)^2(12)(\text{Sen. } 30 J - \text{Cos. } 30 \lambda) =$$

$$= 32\sqrt{3}\lambda - 32 J \quad \text{Pulg./Seg2.}$$

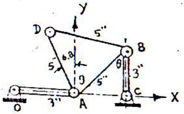
Sustituyendo en la ecuación (I) los valores deducidos:

$$-a_A\lambda = (48 - 6\sqrt{3}\alpha - 32)J - (6\alpha - 32\sqrt{3})\lambda$$

Igualando módulos en la dirección {y} de ambos miembros:

$$0 = 48 - 6\sqrt{3}\alpha - 32 \longrightarrow \alpha = 1.54 \text{ rad./Seg2.}$$

275.—En la posición mostrada el eslabón OA tiene velocidad angular de 4 rad./seg. de sentido antihorario y aceleración angular de 12 rad./seg.^{2} en sentido horario. Determinar para estas condiciones la velocidad del vértice D de la plancha equilátera ABD.



SOLUCION:

Mediante relaciones geométricas se deduce: (Ver diagrama)

Puesto que. $AB = 5$ Pulg. $\longrightarrow \begin{cases} AC = 4 \text{ Pulg.} \\ \theta = 53.2° \end{cases}$

$CB = 3$ Pulg.

Luego: $\gamma = 60° - 53.2° = 6.8° \longrightarrow AD = 5(\text{Cos. } 6.8 J - \text{Sen. } 6.8 \lambda)$ [I]

C es centro instantáneo de las velocidades V_A y V_B. Por tanto:

$$\frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} = \Omega_{AB} = \Omega_{AD} \longrightarrow \Omega_{AD} = V_A/4$$

Pero: $V_A = \omega \times r = 4K \times 3\lambda = 12 J$ Pulg./Seg $\longrightarrow \Omega_{AD} = 12/4 = 3 \frac{\text{rad.}}{\text{Seg}}$ [II]

Según la ecuación de velocidades relativas se afirma:

$$V_D = V_A + V_{D/A} = V_A + \Omega_{AD} \times AD \qquad [III]$$

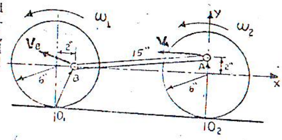
Sustituyendo las ecuaciones I y II en (III) y simplificando se obtiene:

$$V_D = 12 J + (-3K) \times 5(\text{Cos. } 6.8 J - \text{Sen. } 6.8 \lambda) =$$

Por tanto: $$= 12 J + 14.84\lambda + 1.77 J$$

$$|V_D| = \sqrt{(14.84)^2 + (13.77)^2} \text{ Pulg./Seg} \longrightarrow V_D = .1.687 \text{ pies/Seg}$$

278.—Si en la posición mostrada la rueda de la izquierda se desplaza con velocidad angular de 4 rad./seg. de sentido antihorario, la cual decrece a razón de 10 rad./seg.², calcular para dicho instante la velocidad angular de la rueda de la derecha y del eslabón de conexión AB



SOLUCION·

Por condiciones del problema se afirma: (Ver diagrama)

$O_1B = r_1 = 6J + 2i$ $\qquad \omega_1 = 4K$ rad./Seg , $\alpha_1 = 10K$ rad./Seg2

$O_2A = r_2 = 8J$ $\qquad \omega_2 = \omega K$ rad./Seg ; $\alpha_2 = \alpha K$ rad./Seg2

$BA = \rho = \sqrt{221}\, i + 2J$, $\quad R = 6$ Pulg. (Radio de los discos).

La ecuación de velocidades relativas entre A y B es.

$$V_A = V_B + V_{A/B} \quad \text{Donde.} \begin{cases} V_A = \omega_2 \times r_2 = \omega K \times 8J = -8\omega i \\ V_B = \omega_1 \times r_1 = 4K \times (6J + 2i) = 8J - 24i \\ V_{A/B} = \Omega_{AB} \times \rho = \Omega_{AB} K \times (\sqrt{221}\, i + 2J) = \\ \qquad = \Omega_{AB}(\sqrt{221}\, J - 2i) \end{cases}$$

Sustituyendo valores y ordenando términos:

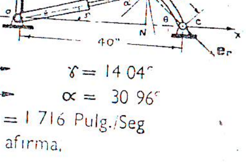
$$-8\omega i = (8 + \Omega_{AB}\sqrt{221})J - (24 + 2\Omega_{AB})i$$

Comparando módulos de las componentes x e y se deduce

$$0 = 8 + \Omega_{AB}\sqrt{221} \longrightarrow \Omega_{AB} = -0\ 5381 \text{ rad./Seg} \quad \text{Resp}$$

$$8\omega = 24 + 2\Omega_{AB} \longrightarrow \omega = 2\ 8654 \text{ rad./Seg}$$

279.—El movimiento de la plancha P se regula por medio del cilindro hidráulico E cuyo vástago del pistón se alarga a razón constante de 2 Pulg./Seg Para el instante en el cual el eslabón BC pasa por la posición $\theta = 45°$ calcular la aceleración de la plancha P



SOLUCION:

Observando el diagrama se deduce

$ND = 8\sqrt{2}\ \text{Cos}\ 45 = 8$ Pulg

$\text{tg.}\ \gamma = 8/(40 - 8) = 0.25 \longrightarrow \gamma = 14\ 04°$

$\alpha + 90° = 180° - (45° + 14.04°) \longrightarrow \alpha = 30\ 96°$

Además: $V_D = V_E\ \text{Cos}\ \alpha = 2\,(0.858) = 1\ 716$ Pulg./Seg

Considerando que el punto C es fijo se afirma,

$V_D = \Omega_{CD} \quad CD \longrightarrow \Omega_{CD} = 1\,716/8\sqrt{2} = 0.152$ rad./Seg

Puesto que CB es cuerpo rígido $\quad \Omega_{CD} = \Omega_{CB}$ **Luego**

$V_B = \Omega_{CD}\ CB = 0.152(16\sqrt{2}) = 2.432\sqrt{2}$ Pulg./Seg .... (1)

Tomando como centro instantáneo el punto de intersección Q de las prolongaciones de las rectas **AO** y **CB** se afirma:

$$\Omega_{BA} = \frac{V_A}{24} = \frac{V_B}{24\sqrt{2}} = \frac{2.432\sqrt{2}}{24\sqrt{2}}$$

De donde se deduce $\quad V_A = 2.432$ Pulg. Seg.

$\Omega_{BA} = 0.1013$ rad./Seg .... (2)

La aceleración de B en coordenadas tangencial y transversa se define por:

$$a_B = a_t + a_n \qquad \text{...} \quad (3)$$

Donde según deducciones anteriores.

$a_t = \dfrac{dV_B}{dt} = 0$ Puesto que: V_B = constante.

$a_n = \dfrac{V_B^2}{CB} = \dfrac{(2.432\sqrt{2})^2}{16\sqrt{2}} = \dfrac{0.729}{\sqrt{2}}$ Pulg./Seg2

Reemplazando en (3):

$a_B = 0 + \dfrac{0.729}{\sqrt{2}}\, e_n$ Donde: $\underline{e_n} =$ Sen. 45° I − Cos. 45° J

Luego: $a_B = \dfrac{0.729}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} I - \dfrac{\sqrt{2}}{2} J\right) = 0.3645\,(I - J)$ Pulg./Seg2. (4)

Otra ecuación para a_B se deduce considerando como punto base el mismo que se tomó como centro instantáneo de V_A, considerando además que:

$$\Omega_{BA} = \Omega_{QB} = \Omega_p$$

Por tanto:

$$\alpha_{BA} = \alpha_{QB} = \alpha_p$$

$$a_B = a_Q + \alpha_p \times [QB] - \Omega_{QB}^2\,[QB] \qquad \text{..........................} \quad (5)$$

Donde.

$a_Q = -\Omega_{OQ}^2(OQ) = -\Omega_{OQ}^2 R_J$ {Q centro instantáneo}

$QB = 24\sqrt{2}($ Sen. 45° I − Cos. 45° $J) = 24(I - J)$

Reemplazando en (5)

$$a_B = -\Omega_{OQ}^2 R_J + \alpha_p K \times 24(I - J) - (0.1013)^2(24)(I - J)$$

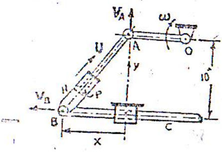
$a_B = (24\,\alpha_p - 0.245)\,I + (0.245 - 24\,\alpha_p - \Omega^2 R)\,J$ .... (6)

Igualando los módulos de las componentes vectoriales a_x en las ecuaciones (4) y (6) se obtiene la expresión :

$$0.3645 = 24\,\alpha_p - 0.245$$

Despejando: α_p $\longrightarrow \alpha_p = 0.025$ rad./Seg2. Sentido horario **Resp.**

A.18.—En la posición horizontal mostrada el eslabón OA tiene velocidad angular constante de 3/2 rad./seg. para este mismo instante X = 6 pulg., $\dot{x} = -4$ pulg./seg. (constante). Determinar para estas condiciones la velocidad y aceleración del pistón P respecto al cilindro hidráulico H, y la velocidad angular de BA.



SOLUCION:

Según condiciones del problema:

$\omega_{OA} = 3/2$ rad./Seg. [constante] $\longrightarrow \dot{\omega}_{OA} = 0$

$x = 6$ pulg.

$\dot{x} = -4$ pulg./Seg. [constante] $\longrightarrow \ddot{x} = 0$

Puesto que BA varía con el tiempo, la ecuación relativa de velocidades entre A y B será:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{A/B} + \mathbf{U} \quad \text{.............................} [I]$$

Donde según el gráfico y datos:

$\mathbf{V}_B = 4\,\mathbf{I}$

$\mathbf{V}_A = (3/2)\,\mathbf{K} \times 4\mathbf{I} = 6\,\mathbf{J}$

$\mathbf{V}_{A/B} = \dot{\theta}_{BA}\,\mathbf{K} \times \mathbf{BA}$ Siendo: $\mathbf{BA} = 6\mathbf{I} + 10\,\mathbf{J}$

$\mathbf{U} = U\ e_n \longrightarrow$ Siendo: $e_n = \dfrac{6\mathbf{I} + 10\,\mathbf{J}}{2\sqrt{34}}$

Reemplazando estos valores en la ecuación (I) se obtiene:

$$6\,\mathbf{J} = 4\mathbf{I} + \dot{\theta}_{BA}\,\mathbf{K} \times [6\mathbf{I} + 10\,\mathbf{J}] + U \cdot \left(\frac{3\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{J}}{\sqrt{34}}\right)$$

$$6\,\mathbf{J} = (4 - 10\,\dot{\theta}_{BA} + 3U/\sqrt{34})\,\mathbf{I} + (6\,\dot{\theta}_{BA} + 5U/\sqrt{34}).\mathbf{J}$$

Igualando componentes en ambas direcciones se deduce:

$$6 = 6\,\dot{\theta}_{BA} + 5U/\sqrt{34} \quad \text{.............................} [A]$$

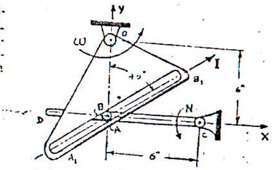
$$0 = 4 - 10\dot{\theta}_{BA} + 3U\sqrt{34} \quad \text{.............................} [B]$$

Resolviendo las ecuaciones A y B se obtiene: $U = 3.08$

$\dot{\theta}_{BA} = 0.56$

Se observa que el procedimiento seguido es similar al problema (266) Ello significa que para deducir la aceleración relativa $\dot{\mathbf{U}}$ se seguirán los mismos pasos de dicho problema.

281.—La barra DC en la posición mostrada gira con velocidad angular constante de N = 2 rad./Seg. en sentido antihorario. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular de la plancha ranurada ABO para este instante.



SOLUCION:

Análisis del diagrama:

Los puntos A y B coinciden tal que: $A \in \overline{A_1O}$ y $B \in \overline{DC}$ considerándose B fijo. Entre estos 2 puntos en la dirección de la ranura hay una velocidad relativa U; tal que:

$$V_A = V_B + V_{A/B} = V_B + U \text{ -------------------- } [I]$$

donde según lo especificado y datos del problema:

[A] .... $V_A = \omega_{OA} \times OA = \omega_{OA}K \times (-6J) = 6\omega_{OA}\lambda$ Pulg./Seg

[B] .... $V_B = \omega_{CB} \times CB = 2K \times (-6\lambda) = -12J$ Pulg./Seg

[C] ------ $U = UI$,donde: $I = \text{Sen.}45°\lambda + \text{Cos.}45°J = \sqrt{2}/2(\lambda + J)$

Sustituyendo en [I] las ecuaciones (A)(B) y (C) se deduce:

$$6\omega_{OA}\lambda = \left[\sqrt{2}/2\right] U\lambda + \left[U\sqrt{2}/2 - 12\right] J$$

Igualando módulos en ambos miembros se obtiene:

$$0 = U\sqrt{2}/2 - 12 \longrightarrow U = 12\sqrt{2} \text{ Pulg./Seg}$$

$$6\omega_{OA} = U\sqrt{2}/2 \longrightarrow \omega_{OA} = 2 \text{ rad./Seg}$$

Derivando la ecuación I y agregando la aceleración de Coriolis por efecto de la rotación entre A y B se obtiene:

$$a_A = a_B + a_{A/B} + a_C = a_B + \dot{U} + a_C \text{ ------------- (II)}$$

Donde según A, B, C y datos del problema.

[D] ------ $a_A = \dot{V}_A = \dot{\omega}_{OA} \times OA - \omega_{OA}^2 OA = \alpha_{OA}K \times (-6J) - (2)^2(-6J) =$

$$= 6\alpha_{OA}\lambda + 24J$$

[E] ------ $a_B = \dot{V}_B = \dot{\omega}_{CB} \times CB - \omega_{CB}^2 CB = 0 - (2)^2(-6\lambda) = 24\lambda$

$[\omega_{CB} = N = \text{constante.}]$

[F] ------ $\dot{U} = \dot{U}I = \dot{U}\sqrt{2}/2[\lambda + J]$

[G] ------ $a_c = 2\,\omega_{cB} \times U = 2(2K) \times 12\sqrt{2}\,I = 48\sqrt{2}\,K \times \sqrt{2}/2\,(\lambda + J) =$

$$= \qquad 48\,(J - \lambda)$$

Sustituyendo en II las ecuaciones D, E, F y G:

$$6\,\alpha_{OA}\lambda + 24\,J = \left[\,24 + \dot{U}\sqrt{2}/2 - 48\right]\lambda + \left[\dot{U}\sqrt{2}/2 + 48\right]J$$

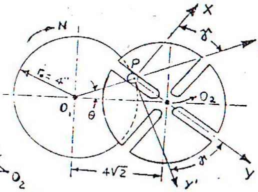
Igualando módulos correspondientes a la misma dirección.

$$6\,\alpha_{OA} = -24 + \dot{U}\sqrt{2}/2 \qquad\qquad 24 = \dot{U}\sqrt{2}/2 + 48$$

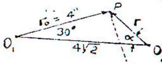
Resolviendo estas 2 ecuaciones se obtiene:

$$\dot{U} = -24\sqrt{2} \ \text{Pulg./Seg2.} \qquad\qquad \alpha = -8 \ \text{rad./Seg2.}$$ Resp.

282.—El mecanismo intermitente mostrado consta del pasador P fijo en el disco A que rota con velocidad angular constante N = 60 R.P.M. en sentido horario. Si dicho pasador entra en las ranuras radiales del disco B cuando $\theta = 45°$, saliendo luego de haberlo hecho girar 90°, determinar la velocidad angular y aceleración angular del disco B cuando $\theta = 30°$.



SOLUCION:



Por transformación de unidades: $N = 60(2\pi/60) = 2\pi$ rad./Seg.

Cálculos elementales: {Ver gráfico}

$r = O_2P = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2(4)(4\sqrt{2})\,\text{Cos.}\,30°} \longrightarrow r = 2.98$ Pulg.

$[2.98/\,\text{Sen.}\,30] = [4/\,\text{Sen.}\,\alpha] \longrightarrow \alpha = 42.2°$

Relacionando α y el ángulo de 30°: $\longrightarrow \theta = 17.8°$

Vectores unitarios: $I = \text{Cos.}\,17.8\,\lambda + \text{Sen.}\,17.8\,J = 0.952\lambda + 0.311\,J$

$$J^1 = \text{Cos.}\,17.8\,J - \text{Sen.}\,17.8\,\lambda = 0.952\,J - 0.311\,\lambda$$

Puesto que, PO_1 es constante, la velocidad absoluta de P respecto al eje fijo $\perp$ a O_1 será:

$V_p = N \times r_o = 2\pi K \times 4I = 8\pi J^1 = 8\pi(0.952\,J - 0.311\,\lambda)$ ------ [I]

Esta misma velocidad puede expresarse en coordenadas polares tomando como base el punto fijo O_2. O sea:

$V_p = \dot{r}(-J) + r\omega\lambda = 2.98\,\omega\lambda - \dot{r}\,J$ ---------------------------- [II]

Sustituyendo I en II e igualando módulos de ambas componentes:

$8\pi(0.952)J - 8\pi(0.311)\lambda = 2.98\omega\lambda - \dot{r}J$

De donde:

$8\pi(0.952) = -\dot{r}$ $\longrightarrow$ $\dot{r} = 23.98$ Pulg./Seg

$8\pi(0.311) = -2.98\omega$ $\longrightarrow$ $\omega = 2.56$ rad./Seg.

(Sentido antihorario)

Similarmente se obtiene dos expresiones para la aceleración de P por derivación de I y II . O sea:

$a_p = \dot{N} \times r_o - N^2 r_o = \bar{0} - (2\pi)^2 4I = -16\pi^2(0.952\lambda + 0.311J)$ [III]

$a_p = (\ddot{r} - r\omega^2)(-J) + (r\alpha + 2\dot{r}\omega)\lambda$ ---------------------- [IV]

Por igualación de III y IV se obtiene la ecuación:

$-16(0.311)\pi^2 J - 16(0.952)\pi^2\lambda = (r\alpha + 2\omega\dot{r})\lambda - (\ddot{r} - r\omega^2)J$

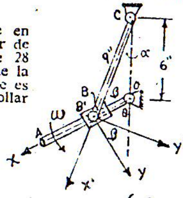
Igualando módulos en la dirección λ y dando valores numéricos:

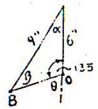
$-16(0.952)\pi^2 = r\alpha + 2\omega\dot{r} = 2.98\alpha + 2(2.56)(23.98)$

Luego: $\alpha = -(151.62 + 122.78)/2.98 \longrightarrow \alpha = 92.1$ rad./Seg2.

(Sentido antihorario)

283.—El eslabón OA, en el instante en que θ 45° rota con velocidad angular de 10 rad./seg y aceleración angular de 28 rad./seg.² Determinar para este instante la aceleración angular del eslabón CB que es obligado a moverse por acción del collar B que desliza en AO.





SOLUCION:

Cálculos elementales:

$$\frac{9}{\text{Sen.}135} = \frac{6}{\text{Sen.}\,\beta} = \frac{OB}{\text{Sen.}\,\alpha} \longrightarrow \begin{cases} \beta = 28.3^\circ \\ \alpha = 16.7^\circ \\ OB = 4 \text{ Pulg.} = OA \end{cases}$$

$\beta + \alpha = 45°$

Valores conocidos: $\omega_{OD} = 10$ rad./Seg ; $\dot{\omega}_{OD} = 28$ rad./Seg2. $\theta = 45°$

Vector unitario : $I = \text{Cos.}\,\beta\lambda + \text{Sen.}\,\beta J = 0.91\lambda + 0.47J$

En el instante mostrado , A y B coinciden tal que: A $\in$ OD y B $\in$ CB.

Las velocidades de A y B respectivamente serán:

$V_A = \omega_{OD} \times OA = 10K \times 4\lambda = 40J$ ------------------------ [I]

$$V_B = \Omega_{CB} \times CB = \Omega_{CB}K \times 9I = \Omega_{CB}K \times 9(0.91\lambda + 0.47J) =$$
$$8.19\Omega_{CB}J - 4.23\Omega_{CB}\lambda \quad \text{-------} \quad [II]$$

La ecuación del movimiento relativo entre A y B es:

$V_B = V_A + V_{B/A}$ donde: $V_{B/A} = U\lambda$ [Velocidad relativa de B respecto a A]

Sustituyendo las ecuaciones I y II e igualando componentes se obtiene:

$$8.19\Omega_{CB}J - 4.23\Omega_{CB}\lambda = 40J + U\lambda$$

$8.19\Omega_{CB} = 40 \longrightarrow \Omega_{CB} = 4.9$ rad./Seg

$-4.23\Omega_{CB} = U \longrightarrow U = -21.5$ Pulg./Seg

Las aceleraciones absolutas de A y B se obtiene por derivación de I y II:

$$a_A = \dot{\omega}_{OD} \times OA - \omega_{OD}^2 OA = 28K \times 4\lambda - (10)^2(4\lambda) = 112J - 400\lambda \quad [III]$$

$$a_B = \dot{\Omega}_{CB} \times CB - \Omega_{CB}^2 CB = \alpha_{CB}K \times 9I - \Omega_{CB}^2(9I) =$$

$$a_B = \alpha_{CB}K \times 9(0.91\lambda + 0.47J) - (4.9)^2 9(0.91\lambda + 0.47J) =$$
$$(8.19\alpha_{CB} - 113)J - (4.23\alpha_{CB} + 203)\lambda \quad [IV]$$

La ecuación relativa a las aceleraciones de A y B es:

$a_B = a_A + a_{B/A} + a_C$ donde: $a_{B/A} = \dot{U}\lambda$ [Aceleración relativa de B respecto a A] [V]

$$a_C = 2\omega_{OA} \times U = 2(10K) \times (-21.5\lambda) = -430J \quad [VI]$$

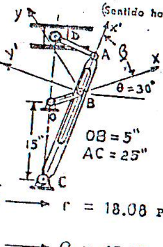
Sustituyendo III, IV, V y VI en la ecuación anterior se obtiene:

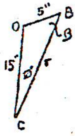
$$(8.19\alpha_{CB} - 113)J - (4.23\alpha_{CB} + 203)\lambda = (112 - 430)J - (400 - \dot{U})\lambda$$

Igualando módulos de las componentes J se deduce:

$8.19\alpha_{CB} - 113 = 112 - 430 \longrightarrow \alpha_{CB} = 25.04$ rad./Seg2. Resp. (Sentido horario)

284.—El mecanismo mostrado es usado para lograr movimiento de ida y vuelta de la muesca deslizante D. Determinar la velocidad del extremo A y la aceleración angular de AC, cuando $\theta = 30°$; sabiendo que el eslabón motriz OB rota con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad./seg.





SOLUCION:

Cálculos elementales:

$CB = r = \sqrt{15^2 + 5^2 - 2(15)(5)\,\text{Cos.}\,120} \longrightarrow r = 18.08$ Pulg.

$\dfrac{18.08}{\text{Sen.}\,120} = \dfrac{15}{\text{Sen.}\,\beta} \longrightarrow \beta = 47.1°$

Valores de los vectores unitarios λ^1, J^1 en función de λ, J.

$\lambda^1 = \text{Cos.}\ \beta \lambda + \text{Sen.}\ \beta J \longrightarrow \lambda^1 = 0.680 \lambda + 0.732 J$

$J^1 = \text{Cos.}\ \beta J - \text{Sen.}\ \beta \lambda \longrightarrow J^1 = 0.680 J - 0.732 \lambda$

Cálculo de V_B, tomando como base el punto O:

$$V_B = \Omega_{OB} \times OB = 3K \times 5\lambda = 15J \text{ .... [I]}$$

Cálculo de V_B, tomando como base el punto C:

$$V_B = \dot{r}\lambda^1 + r\phi J^1 = \dot{r}(0.680\lambda + 0.732J) + 18.08(\dot{\phi})(0.680J - 0.732\lambda)$$

$$V_B = [0.680\dot{r} - 13.2\dot{\phi}]\lambda + [0.732\dot{r} + 12.21\dot{\phi}]J \text{ .... [II]}$$

Comparando módulos de las igualdades I y II se obtiene las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 0.680\dot{r} - 13.2\dot{\phi} &= 0 \\ 0.732\dot{r} + 12.21\dot{\phi} &= 15 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{r} &= 11.01 \text{ Pulg.} \\ \dot{\phi} &= 0.569 \text{ rad./Seg.} \end{aligned}$$

Puesto que $\dot{\phi}$ pertenece a **CB** y **CA** se deduce:

$$V_A = \dot{\phi}(CA) = 0.569(25) \longrightarrow V_A = 14.225 \text{ Pulg./Seg.}$$

Derivando la ecuación I, siendo Ω_{OB} constante se obtiene:

$$a_B = \dot{\Omega}_{OB} \times OB - \Omega^2_{OB} \cdot OB = \bar{0} - 3^2(5\lambda) = -45\lambda \text{ .... [III]}$$

La expresión de esta misma aceleración deducida respecto a C será:

$$a_B = [\ddot{r} - r\dot{\phi}^2]\lambda^1 + [r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}]J^1 \text{ donde } \ddot{\phi} = \alpha_{CB} = \alpha_{CA}$$

Reemplazando valores numéricos:

$$a_B = [\ddot{r} - 18.08(0.569)^2](0.680\lambda + 0.732J) +$$
$$[18.08\alpha_{CA} + 2(11.01)(0.569)](0.680J - 0.732\lambda)$$

$$a_B = \left\{[\ddot{r} - 5.83]0.68 - [18.08\alpha_{CA} + 12.53]0.732\right\}\lambda +$$
$$\left\{[\ddot{r} - 5.83]0.732 + [18.08\alpha_{CA} + 12.53]0.68\right\}J \text{ [IV]}$$

Comparando módulos de las componentes de III y IV se obtiene:

$$[\ddot{r} - 5.83]0.68 - [18.08\alpha_{CA} + 12.53]0.732 = -45 \quad \text{[D]}$$

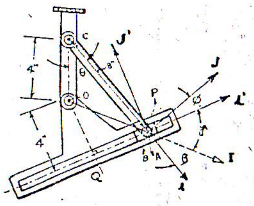
$$[\ddot{r} - 5.83]0.732 + [18.08\alpha_{CA} + 12.53]0.68 = 0 \quad \text{[E]}$$

Despejando $\ddot{r}$ de E y sustituyendo dicho valor en D se deduce la ecuación:

$$(18.08\alpha_{CA} + 12.53)[0.680^2 + 0.732^2] = 45(0.732)$$

$$\longrightarrow \alpha_{CA} = 1.112 \text{ rad./Seg2.}$$

287.—El eslabón CA oscila con movimiento rotatorio alrededor de C como se ilustra, haciendo oscilar al miembro ranurado en torno a O. Para el instante en el cual $\theta = 30°$, el movimiento angular del eslabón CA está dado por $\dot{\theta} = 6$ rad./Seg. y $\ddot{\theta} = -30$ rad./Seg.². Determinar la velocidad angular y aceleración angular del miembro ranurado en dicho instante.



SOLUCION:

ANALISIS DEL DIAGRAMA:

Se ha elegido 2 sistemas de coordenadas tal que: $\mathbf{I}$ sigue la dirección de CA e $\mathbf{I}'$ la dirección de la guía ranurada del cuerpo OPQ. El punto A pertenece a CP y B pertenece a OP, superponiendose ambos en el instante representado. La velocidad relativa de A respecto a B tiene dirección $\mathbf{I}'$, cuyo módulo es U, tal que : $\mathbf{U} = U\mathbf{I}'$.

Cálculos elementales:

$$OA^2 = 4^2 + 8^2 - 64\,\text{Cos.}30° \longrightarrow OA = 4.95''$$
$$4.95/\,\text{Sen.}30° = 4/\,\text{Sen.}\,\beta \longrightarrow \beta = 23.8°$$
$$\gamma = \text{arc. Sen.}\,(4/4.95) = 54° \longrightarrow \phi = 12.2°$$

Vectores unitarios:
$$\begin{cases} \mathbf{I}' = \text{Sen.}\,\phi\,\mathbf{I} + \text{Cos.}\,\phi\,\mathbf{J} \\ \mathbf{J}' = \text{Sen.}\,\phi\,\mathbf{J} - \text{Cos.}\,\phi\,\mathbf{I} \\ \mathbf{I} = \text{Sen.}\,\beta\,\mathbf{J} + \text{Cos.}\,\beta\,\mathbf{I} \end{cases}$$

Según el gráfico y datos se deduce:

$$CA = \mathbf{r}_A = 8\mathbf{I} \quad \text{Pulg.} \qquad ; \quad \dot{\theta} = \Omega_{CA} = 6K \quad \text{rad./Seg}$$

$$\text{[I]}\quad \mathbf{V}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = \Omega_{CA} \times \mathbf{r}_A = 6K \times 8\mathbf{I} = 48\mathbf{J} \qquad ; \quad \ddot{\theta} = \alpha_{CA} = -30K \quad \text{rad./Seg2.}$$

$$\text{(II)}\quad \mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = \alpha_{CA} \times \mathbf{r}_A - \Omega_{CA}^2 \mathbf{r}_A = -30K \times 8\mathbf{I} - (6)^2(8)\mathbf{I}$$
$$= -240\mathbf{J} - 288\mathbf{I}$$

$$OA = \mathbf{r}_B = r_B\mathbf{I} = 4.95(0.41\mathbf{J} + 0.91\mathbf{I}) = 2.04\mathbf{J} + 4.5\mathbf{I}$$

$$\text{[III]}\quad \mathbf{V}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \Omega_{OB} \times \mathbf{r}_B = \Omega_{OB}K \times (2.04\mathbf{J} + 4.5\mathbf{I}) = 4.5\,\Omega_{OB}\mathbf{J} - 2.04\,\Omega_{OB}\mathbf{I} \quad \text{Pulg./Seg}$$

[IV] $a_B = \ddot{r}_B = \alpha_{OB} \times r_B - \Omega_{OB}^2 r_B = \alpha_{OB} K \times (2.04 J^1 + 4.5\,\lambda) -$

$$\Omega_{OB}^2 (2.04\,J + 4.5\,\lambda) \quad \text{Pulg./Seg2.}$$

Las velocidades de A y B estan relacionadas por la ecuación:

$$V_A = V_B + V_{A/B} = V_B + U\lambda^1 = V_B + U[0.22\lambda + 0.97J]$$

Sustituyendo las ecuaciones I y III se deduce:

$$48\,J = (4.5\,\Omega_{OB} + 0.97U)\,J + (0.22U - 2.04\,\Omega_{OB})\,\lambda$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección se obtiene:

$$\left\{\begin{aligned} 48 &= 4.5\Omega_{OB} + 0.97U \\ 0 &= 0.22U - 2.04\,\Omega_{OB} \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} &\longrightarrow \quad U = 32.7 \ \text{Pulg./Seg} \\ &\longrightarrow \quad \Omega_{OB} = 3.53 \ \text{rad./Seg} \end{aligned}$$ Resp.

La ecuación de aceleraciones relativas de A y B es:

(1) $a_A = a_B + a_{A/B} + a_C$ Siendo:

[V] $a_{A/B} = \dot{U}\lambda^1 = \dot{U}(0.22\,\lambda + 0.97\,J)$

[VI] $a_C = 2\Omega_{OA} \times U = 2(3.53)K \times 32.7\,\lambda^1 = 232\,J^1 =$

$$= 232(0.22\,J - 0.97\,\lambda)$$

[IV$_1$] Según (IV) $a_B = (4.5J - 2.04\lambda)\,\alpha_{OB} - 25.5J - 56.2\,\lambda$

Sustituyendo las ecuaciones II, IV$_1$, V, VI, en (1) se obtiene:

$$-240J - 288\,\lambda = (4.5\,\alpha_{OB} - 25.5 + 0.97\dot{U} + 51)\,J -$$
$$-(2.04\,\alpha_{OB} + 56.2 - 0.22\dot{U} + 224)\,\lambda$$

Igualando módulos correspondientes a la misma dirección se obtiene:

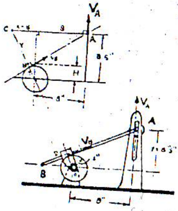
[A] $-240 = 4.5\,\alpha_{OB} - 25.5 + 0.97\dot{U} + 51$

[B] $288 = 2.04\,\alpha_{OB} + 56.2 - 0.22\dot{U} + 224$

Desarrollando las ecuaciones en A y B se obtiene:

$$\boxed{\alpha_{OB} = 17.4 \ \text{rad./Seg2.}}$$ Resp.

288.- Tal como se ilustra, la barra AB desliza en la guía D la cual pivota alrededor de O. La volante de centro en O rota debido a que su contacto con la superficie de la barra es no deslizante. Si durante un intervalo de su movimiento A se eleva con velocidad constante de 5 Pul./Seg.; determinar la velocidad angular Ω_r del volante respecto a un sistema en rotación adherido a la guía D y la velocidad angular absoluta del volante en el instante para el cual y = 8 Pulg.



SOLUCION:

Puesto que C es centro instantáneo o polo de velocidades se afirma:

$$\Omega_{BA} = \Omega_{CB} = \frac{V_A}{X} = \frac{V_B}{Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

donde: (x = CA) e (Y = CD) se obtienen mediante cálculos elementales. (Ver diagrama).

$$8/2 = \frac{\sqrt{8^2 + (8.5 - H)^2}}{H} \longrightarrow H = 2.5 \text{ Pulg.}$$

$$\frac{X - 8}{8.5 - H} = \frac{Y + 2}{8H/2} = \frac{8.5}{8} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = 14.375 \text{ Pulg.} \\ Y = 8.625 \text{ Pulg.} \end{array} \right. \quad [II]$$

De las ecuaciones (I) y (II) se obtiene:

$$\Omega_{BA} = V_A/X = 5/14.375 \longrightarrow \Omega_{BA} = 0.35 \text{ rad./Seg}$$

$$V_B = V_A(Y/X) = 5(8.625/14.375) \longrightarrow V_B = 3.00 \text{ Pulg./Seg}$$

La velocidad angular absoluta de la rueda será: (Respecto al punto O)

$$\Omega = V_B/r = 3/2 \longrightarrow \boxed{\Omega = 1.50 \text{ rad./Seg}}$$

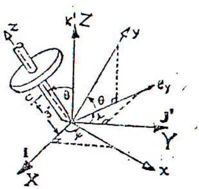
La velocidad angular relativa al punto móvil B se deduce de la ecuación:

$$\Omega_{\text{absoluta}} = (\Omega_D) + \Omega_{rel.} \quad \text{Donde,} \quad \Omega_D = -\Omega_{BA} \text{ [Ver gráfico.]}$$

Por tanto:

$$\Omega_{rel.} = \Omega + \Omega_{BA} = 1.5 + 0.35 \longrightarrow \boxed{\Omega_{rel.} = 1.85 \text{ rad./Seg}}$$

291.—El punto C de la figura mostrada situada sobre el eje del rotor a una distancia de 3 Pulg. de O tiene en un cierto instante una velocidad $V_c = 3i + 4J$, donde **i** y **J** son vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes x e y respectivamente. Para dicho instante en el cual además $\psi = 60°$ y $\theta = 30°$, determinar las componentes X, Y, Z de Vc.



SOLUCION:

Sean I, J', K' vectores unitarios en las direcciónes X, Y, Z,

Según el enunciado : $V_c = 3i + 4J$ Pulg./Seg .... ①

Observando el gráfico se deduce:

$$i = \text{Cos. } \psi I + \text{Sen. } \psi J' = \frac{1}{2} I + \frac{\sqrt{3}}{2} J' \quad \text{.........} \quad ②$$

$J = \text{Cos. } \theta e_y + \text{Sen. } \theta K'$, donde $e_y = \text{Cos. } \psi J' - \text{Sen. } \psi I$

Luego: $J = \text{Cos. } \theta (\text{Cos. } \psi J' - \text{Sen. } \psi I) + \text{Sen. } \theta K'$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{4} J' - \frac{3}{4} I + \frac{1}{2} K' \quad \text{..................................} \quad ③$$

Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en ① se obtiene:

$$V_c = \left[\frac{3}{2} - 3\right] I + \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right] J' + 2 K'$$

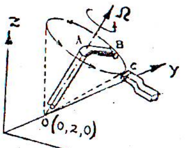
$$V_c = -\frac{3}{2} I + \frac{5\sqrt{3}}{2} J' + 2K' \text{ Pulg./Seg}$$

Por lo tanto: $V_X = -3/2$ Pulg./Seg ; $V_Y = 5\sqrt{3}/2$ Pulg./Seg

$V_Z = 2$ Pulg./Seg

Resp.

293.—Un mecanismo de distribución consta del brazo rotatorio AB y del contacto fijo C. Si el brazo gira alrededor del eje fijo OA con velocidad angular constante $\Omega = 3(3i - 2J - 6K)$, y si las coordenadas del contacto C expresadas en pulgadas son (3, 3, 6); calcular el módulo de la aceleración del extremo B del brazo rotatorio en el instante en que pasa por C.



SOLUCION:

La posición del vector AB está definido por:

$AB = (3-0)i + (3-2)J + (6-0)K = 3i + J + 6K$

$\Omega = 3(3i + 2J + 6K)$ {Según el enunciado}

La aceleración absoluta de B en función de Ω es:

$$a_B = \alpha_{AB} \times AB + \Omega \times (\Omega \times AB) = \Omega \times (\Omega \times AB);$$

puesto que Ω = constante

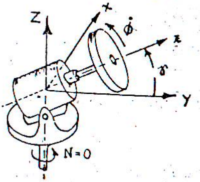
Sustituyendo valores numéricos y simplificando:

$$a_B = 9(3I + 2J + 6K) \times \{(3I + 2J + 6K) \times (3I + J + 6K)\}$$

$$a_B = 9(3I + 2J + 6K) \times (6I - 3K) = 27(15J - 2I - 4K)$$

$$|a_B| = 27\sqrt{15^2 + 2^2 + 4^2} \longrightarrow a_B = 423 \text{ Pulg./Seg2.} \quad \text{Resp.}$$

297.—En el gráfico mostrado suponer que el eje del motor eléctrico y el disco adherido a él rotan en torno al eje z con velocidad angular $\dot{\phi}$ de 42 R.P.M. en el sentido indicado, la cual crece a razón de 10 rad./Seg.² en la posición γ = 30°. En el mismo instante $\dot{\gamma}$ tiene por magnitud 10 rad./Seg. y está creciendo a razón de 15 rad./Seg.². Calcular para este instante la aceleración angular α del rotor, suponiendo que no hay rotación en torno al eje Z.



SOLUCION:

Por condiciones del problema :

$$\dot{\phi} = 42 \text{ R.P.M} = \frac{42 \times 2\pi}{60} = \frac{7\pi}{5} \text{ rad./Seg} \quad ; \quad \ddot{\phi} = 10 \text{ rad./Seg2.}$$

$$\gamma = 30° \quad , \quad \dot{\gamma} = 10 \text{ rad./Seg} \quad ; \quad \ddot{\gamma} = 15 \text{ rad./Seg2.}$$

La velocidad angular del sistema de coordenadas móviles está definida por la ecuación :

$$\omega_{xyz} = \dot{\theta} + \dot{\psi} = \dot{\theta} I + 0 \left\{\text{Según el enunciado } \dot{\psi} = 0\right\}$$

La velocidad angular total del rotor está dada por:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_{rel.} = \dot{\theta} I + \dot{\phi} K$$

Derivando esta expresión se deduce la ecuación de α .

$$\frac{d\Omega}{dt} = \alpha = \ddot{\theta} I + \ddot{\phi} K + \dot{\theta} \dot{I} + \dot{\phi} \dot{K} \quad \text{.......................... (A)}$$

donde:

$$\dot{I} = \omega_{xyz} \times I = \dot{\theta} I \times I = 0$$

$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = \dot{\theta} I \times K = -\dot{\theta} J$$

Además en el diagrama se observa :

$$\theta = 90° - \gamma$$

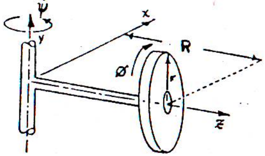
$$\dot{\theta} = -\dot{\gamma} = -10 \quad \text{rad./Seg}$$
$$\ddot{\theta} = -\ddot{\gamma} = -15 \quad \text{rad./Seg2.}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (A) :

$$\alpha = \ddot{\theta}\mathbf{i} + \ddot{\phi}\mathbf{K} - \dot{\phi}\dot{\theta}\mathbf{J} = -15\mathbf{i} + 10\mathbf{K} - \frac{7\pi}{5}(-10)\mathbf{J}$$

$$|\alpha| = \sqrt{15^2 + 10^2 + (14\pi)^2} \longrightarrow \alpha = 47.5 \text{ rad./Seg2.}$$

298.—El disco motriz rueda sin deslizar describiendo una circunferencia de radio R dando una revolución completa en torno al eje vertical y con velocidad angular constante en un tiempo τ. Calcular la expresión de la aceleración angular α del disco y esquematizar los conos del cuerpo y del espacio.



SOLUCION:

Según el enunciado del problema se deduce: :

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi R}{T}$$

Además: $\dot{\phi} = n\dot{\psi}$; donde $n = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r}$

Luego : $\dot{\phi} = \frac{2\pi R^2}{r\,T}$

$\ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$, Puesto que $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes.

La velocidad angular del sistema de coordenadas móviles xyz será:

$$\omega = \dot{\psi}\ \mathbf{J}$$

La velocidad angular absoluta del disco será:

$$\Omega = \dot{\psi}\ \mathbf{J} - \dot{\phi}\ \mathbf{K}$$

La aceleración angular absoluta del disco será:

$$\dot{\Omega} = \dot{\psi}\ \dot{\mathbf{J}} - \dot{\phi}\ \dot{\mathbf{K}} = \alpha \quad \text{.......................................} \ \mathrm{I}$$

Además sabemos que :

$$\dot{\mathbf{J}} = \omega \times \mathbf{J} = \dot{\psi}\mathbf{J} \times \mathbf{J} = 0$$
$$\dot{\mathbf{K}} = \omega \times \mathbf{K} = \dot{\psi}\mathbf{J} \times \mathbf{K} = \dot{\psi}\ \mathbf{i}$$

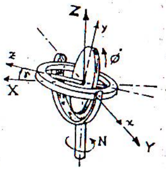
Reemplazando valores en I y simplificando:

$$\alpha = -\dot{\phi}\dot{\psi}\mathbf{i} = -\frac{2\pi R^2}{r\,T} \cdot \frac{2\pi . R}{T}$$

$$\alpha = -\frac{4\pi^2 R^3}{r\,T^2}\mathbf{i}$$

Resp

299.—El Giro-rotor mostrado rota con velocidad angular constante de 100 R.P.M. relativa a los ejes x, y, z en la dirección indicada. Si el ángulo γ que forma el anillo con el plano horizontal X, Y se incrementa a razón de 4 rad./Seg. y si el conjunto se obliga a precesionar en torno al eje vertical Z a razón constante N = 20 R.P.M., determinar el módulo de la aceleración angular α del rotor en el instante para el cual γ = 30° siendo γ cons. tante.



SOLUCION:

Según datos del problema:

$$\dot{\theta} = \dot{\gamma} = 4 \text{ rad./Seg} \quad , \quad \gamma = 30°$$

$$\dot{\phi} = 100 \text{ R.P.M.} = \frac{100(2\pi)}{60} = \frac{10\pi}{3} \text{ rad./Seg}$$

$$\dot{\psi} = N = 20 \text{ R.P.M.} = \frac{20(2\pi)}{60} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad./Seg}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$$. Puesto que $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ son constantes.

La Velocidad angular del sistema de coordenadas móviles será:

$$\omega_{xyz} = \dot{\theta} + \dot{\psi} = -\dot{\theta}\,I + \dot{\psi}K' = -4I + 2\pi/3\,(\text{Cos.}\gamma J + \text{Sen.}\gamma K)$$

La velocidad angular del rotor será:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = \omega_{xyz} + \dot{\phi}K = -4I + \frac{2\pi}{3}\text{Cos.}\gamma J + \left[\frac{2\pi}{3}\text{ Sen.}\gamma + \frac{10\pi}{3}\right]K$$

La aceleración angular del rotor se obtiene por derivación de la ecuación anterior:

$$\dot{\Omega} = -4\dot{I} + \frac{2\pi}{3}\text{Cos.}\gamma\dot{J} - \frac{2\pi}{3}\dot{\gamma}\text{Sen.}\gamma J + \left[\frac{2\pi}{3}\text{ Sen.}\gamma + \frac{10\pi}{3}\right]\dot{K} + \frac{2\pi}{3}\dot{\gamma}\text{ Cos.}\gamma K$$

Donde :

$$\dot{I} = \omega_{xyz} \times I = \frac{2\pi}{3}(\text{ Sen.}30°J - \text{Cos. }30°K) = \frac{\pi}{3}(J - \sqrt{3}K)$$

$$\dot{J} = \omega_{xyz} \times J = -4K - \frac{2\pi}{3}\text{ Sen. }30\,I = -\left(\frac{\pi}{3}I + 4K\right)$$

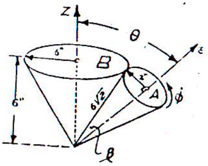
$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = 4J + \frac{2\pi}{3}\text{Cos.}30°I = 4J + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}I$$

Sustituyendo los valores deducidos y simplificando se obtiene:

$$\alpha = 10\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{9} I + 12\pi . J - \frac{4}{3}\pi\sqrt{3}\,K$$, cuyo módulo será:

$$|\alpha| = \pi \sqrt{\left(\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (12)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} \longrightarrow \alpha = 42.9 \text{ rad./Seg2.}$$

300.—El cono circular recto A rueda uniformemente sobre la superficie del cono circular recto fijo B, dando una vuelta completa alrededor de B en 4 Seg. Determinar el módulo de la aceleración angular del cono A.



SOLUCION:

Del diagrama mostrado se deduce:

$$\text{Sen. } \beta = 2/6\sqrt{2} = 0.23 \longrightarrow \beta = 13.6°$$

Por lo tanto:

$$\theta = 45° + \beta = 58.6°$$

Según el enunciado se deduce para $\dot\psi$

2π rad. en 4 Seg. $\longrightarrow \dot\psi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad./Seg

Como A rueda sobre B con movimiento constante puede establecerse la siguiente relación:

$$\frac{\dot\phi}{\dot\psi} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r} = \frac{6}{2} \longrightarrow \dot\phi = 3\dot\psi = 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Similarmente al problema anterior se obtiene:

$$\omega_{xyz} = \dot\theta + \dot\psi = 0 + \dot\psi(\text{ Cos. } \theta K - \text{ Sen. } \theta J)$$

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = \omega_{xyz} + \dot\phi K$$

$$= -\dot\psi \text{ Sen. } \theta J + (\dot\phi + \dot\psi \text{Cos.}\theta) K$$

$$\dot\Omega = -\dot\psi \text{ Sen.}\theta \dot J + (\dot\phi + \dot\psi \text{ Cos. } \theta)\dot K$$

,donde:

$$\dot J = \omega_{xyz} \times J = -\dot\psi \text{ Cos.}\theta I$$

$$\dot K = \omega_{xyz} \times K = -\dot\psi \text{ Sen. } \theta I$$

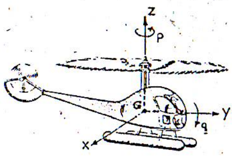
$$\alpha = -\dot\psi \text{ Sen.}\theta(-\dot\psi \text{ Cos. } \theta I) + (\dot\phi + \dot\psi \text{Cos. } \theta)(-\dot\psi \text{ Sen. } \theta I)$$

$$\alpha = -\dot\phi\dot\psi \text{ Sen. } \theta I$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\alpha = -\frac{3\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) I \longrightarrow \alpha = 6.32 \text{ rad./Seg2.}$$ Resp.

303.—El helicóptero mostrado está basculando a razón constante de q rad./Seg. Si las palas del rotor giran con velocidad angular constante p rad./Seg., determinar la expresión de la aceleración angular del rotor. Tomar el eje "y" ligado al fuselaje, perpendicular al eje del rotor y dirigido hacia adelante.



SOLUCION:

La velocidad angular del rotor será:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = PK - qi$$

La aceleración angular del rotor se obtiene derivando esta expresión. Por lo tanto:

$$\dot{\Omega} = \alpha = P\dot{K} - q\dot{i} \qquad \text{Siendo:} \quad P \text{ y } q \quad \text{constantes.}$$

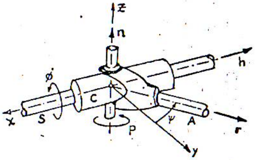
Además:

$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = PK \times K = 0$$
$$\dot{i} = \omega_{xyz} \times i = PK \times i = PJ$$

Sustituyendo los valores deducidos se obtiene:

$$\alpha = P(0) - q(PJ) \longrightarrow \alpha = Pq \text{ rad./Seg2.} \qquad \text{Resp.}$$

305.—El extremo del eslabón A está adherido al collar C mediante la horquilla que permite la rotación de A en torno al eje z. El collar C gira sobre el árbol fijo S deslizando a lo largo de él. Sin considerar el movimiento del otro extremo del eslabón A, demostrar que su velocidad angular Ω debe cumplir la relación $\Omega.h \times (r \times h) = 0$. El eje de A es perpendicular al de la horquilla permaneciendo en el plano x, y, como se indica. r y h son dos vectores cualesquiera a lo largo del eslabón A y del árbol fijo respectivamente.



SOLUCION:

Tesis: $\Omega . h \times (r \times h) = 0$

La ecuación de la velocidad angular absoluta del sistema será:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = \dot{\psi}K - \dot{\phi}i \quad \text{.............................} \quad (1)$$

Del diagrama se deduce :

$$h = -h\,i \qquad ; \qquad n = n\,K \quad \text{.............................} \quad (2)$$

$$r = r(\text{Cos.}\,\psi J - \text{Sen.}\,\psi i) \quad \text{.............................} \quad (3)$$

De acuerdo a las ecuaciones 1, 2 y 3 se afirma:

$$r \times h = r(\text{Cos.}\,\psi J - \text{Sen.}\,\psi i) \times (-h\,i) = rh\,.\,\text{Cos.}\,\psi K$$

$h \times (r \times h) = (-h\,I) \times (rh\,.\,\text{Cos}\,\psi K) = rh^2.\,\text{Cos.}\,\psi J$

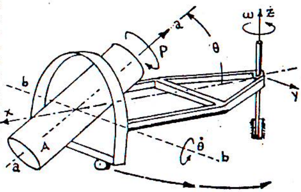
$\Omega.h \times (r \times h) = (\dot{\psi} K - \dot{\phi}\,I)\cdot(rh^2.\,\text{Cos.}\,\psi J) = 0$

Considerando que: $K.J = KJ.\,\text{Cos}\,90° = 0$

Similarmente: $I.J = IJ.\,\text{Cos.}\,90° = 0$

Por lo tanto: $\Omega \cdot hx(rxh) = 0$ L.q.q.d.

306.—El mecanismo del simulador de prueba mostrado consta de un tambor que gira en torno al eje a-a con velocidad angular constante p, relativa al armazón cilíndrico A . Dicho armazón está montado sobre cojinetes y gira en torno al eje horizontal b-b con velocidad angular $\dot{\theta}$ (constante). A su vez el conjunto rota en torno al eje vertical fijo z con velocidad angular constante ω. Determinar la expresión de la aceleración angular ∝ del tambor giratorio en función de θ, durante el movimiento compuesto.



SOLUCION:

Para las condiciones del problema:

$\dot{\theta} = \dot{\theta}$ [constante] $\longrightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\dot{\phi} = p$ [constante] $\longrightarrow \ddot{\phi} = 0$

$\dot{\psi} = \omega$ [constante] $\longrightarrow \ddot{\psi} = 0$

La velocidad angular del sistema de coordenadas móviles es:

$$\omega_{xyz} = \psi + \dot{\theta} = \omega K + \dot{\theta} J$$

La velocidad angular del cilindro sólido será :

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = \omega K + \dot{\theta} J + p\,(\,\text{Sen.}\,\theta K - \text{Cos.}\,\theta I\,)$$

Por lo tanto: $\propto = \dot{\Omega}$

$$\propto = \omega \dot{K} + \dot{\theta} \dot{J} + p.\text{Cos.}\,\theta.\dot{\theta} K + p.\text{Sen.}\,\theta \dot{K} + p.\dot{\theta}\,\text{Sen.}\,\theta I - p.\text{Cos.}\,\theta \dot{I}$$

Donde

$$\dot{I} = \omega_{xyz} \times I = \omega J - \dot{\theta} K$$

$$\dot{J} = \omega_{xyz} \times J = -\omega I$$

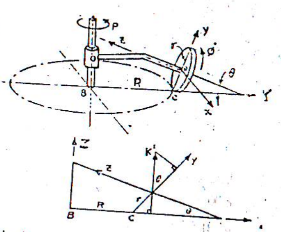
$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = \dot{\theta} I$$

Luego: $\propto = \omega \dot{\theta} I - \dot{\theta} \omega I + p\dot{\theta} \text{Cos}\,\theta K + p\dot{\theta}\,\text{Sen.}\,\theta I + p\dot{\theta}\,\text{Sen.}\,\theta I - p.\omega\,\text{Cos.}\,\theta J + p\dot{\theta}\,\text{Cos.}\,\theta K$

Simplificando se obtiene:

$$\propto = p\left[2\dot{\theta}\,\text{Sen.}\,\theta I - \omega\,\text{Cos.}\,\theta J + 2\dot{\theta}\,\text{Cos.}\,\theta K\right]$$ Resp.

307.—El disco de radio r del mecanismo mostrado gira en torno al eje acodado OO el cual gira alrededor, del eje vertical Z (Fijo) con velocidad angular constante de P rad./Sg. Si el disco rueda sin deslizar describiendo la circunferencia de radio R sobre el plano horizontal; hallar la expresión de la velocidad angular Ω y aceleración angular $\propto$ del disco, suponiendo que el eje x permanece siempre horizontal.



SOLUCION:

Según el enunciado y el diagrama se deduce:

$$2\pi R = n(2\pi r) \longrightarrow n = \frac{R}{r}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = nP \\ \dot{\phi} = RP/r \end{cases} \quad \text{-----------------} \quad [I]$$

La velocidad angular del sistema de coordenadas móviles es:

$$\omega_{xyz} = \dot{\psi} + \dot{\theta} = PK^1 + \bar{0} = P(\text{Cos.}\theta J + \text{Sen.}\theta K) \qquad (A)$$

La velocidad angular absoluta del sistema es:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = P(\text{Cos.}\theta J + \text{Sen.}\theta K) + \dot{\phi}K$$

y Según [I] : $\Omega = P[\text{Cos.}\theta J + (\text{Sen.}\theta + R/r)K]$ Resp.

La aceleración absoluta se obtiene derivando Ω respecto al tiempo:

$$\propto = \dot{\Omega} = P[\text{Cos.}\theta \dot{J} + (\text{Sen.}\theta + R/r)\dot{K}]$$

Puesto que : P y θ son constantes

y según la ecuación A:

$$\dot{J} = \omega_{xyz} \times J = -P\,\text{Sen.}\theta\,\lambda$$

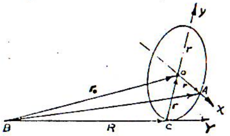
$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = P\,\text{Cos.}\theta\,\lambda$$

En consecuencia:

$$\propto = P[\text{Cos.}\theta(-P\,\text{Sen.}\theta\lambda) + (\text{Sen.}\theta + R/r)(P\,\text{Cos.}\theta\lambda)]$$

Donde: $\propto = P^2\frac{R}{r}\,\text{Cos.}\theta\lambda$ Resp.

308.—Para las condiciones del problema anterior, determinar la expresión de la aceleración del punto A situado en la periferia del disco para el instante representado.



SOLUCION:

Las expresiones halladas en el problema anterior son totales o absolutas respecto a X,Y,Z, (Fijos), por tanto: Tomando como punto base O la aceleración de A estará definida par la ecuación:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \alpha \times OA + \Omega \times (\Omega \times OA) \quad \text{.....................} \quad ①$$

Usando los resultados del problema 307 y según el gráfico se deduce:

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{p}} \times BO + \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times BO) = \bar{0} + \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times BO) = p^2 K^1 \times (K^1 \times BO)$$

$$= p^2 (Cos.\theta J + Sen.\theta K) \times [(Cos.\theta J + Sen.\theta K) \times (R\,Cos.\theta K - R\,Sen.\theta J + r J)]$$

$$= p^2 (Cos.\theta J + Sen.\theta K) \times (R - r\,Sen.\theta) I$$

$$\mathbf{a}_0 = p^2 (R - r\,Sen.\theta)(Sen.\theta J - Cos.\theta K) \text{.............................} \quad ②$$

$$\alpha \times OA = \alpha I \times r I = r\alpha\, I \times I = 0 \quad \text{.................................} \quad ③$$

$$\Omega \times (\Omega \times OA) = p^2 \left[Cos.\theta J + \left(Sen.\theta + \frac{R}{r}\right) K\right] \times \left\{\left[Cos.\theta J + \left(Sen.\theta + \frac{R}{r}\right) K\right] \times r I\right\}$$

$$\Omega \times (\Omega \times OA) = -\,p^2 \left(r + \frac{R^2}{r} + 2R.Sen.\theta\right) \quad \text{.........................} \quad ④$$

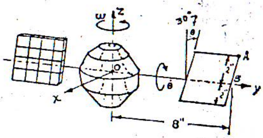
Reemplazando 2. 3 y 4 en la ecuación 1 se obtiene:

$$\mathbf{a}_A = p^2 (R - r.Sen.\theta)(Sen.\theta J - Cos.\theta K) - p^2 \left(r + \frac{R^2}{r} + 2R\,Sen.\theta\right) I$$

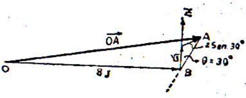
Por lo tanto:

$$\mathbf{a}_A = p^2 \left[(R - r\,Sen.\theta)(Sen.\theta J - Cos.\theta K) - \left(r + \frac{R^2}{r} + 2R\,Sen.\theta\right) I\right]$$

309.—El centro O de la cápsula espacial mostrada se mueve en el espacio con velocidad constante. Durante el movimiento anterior a su estabilización la cápsula gira en torno a su eje z con $\omega = 1/2$ rad./Seg. Los ejes x, y, z están adheridos al cuerpo de la cápsula y los paneles solares giran en torno al eje y con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 1/4$ rad./Seg. respecto a la cápsula. Si la velocidad angular asboluta de los paneles es Ω determinar la aceleración angular $\dot{\Omega}$ y la aceleración del punto A cuando $\theta = 30°$.



SOLUCION:



La velocidad angular absoluta de los paneles está definida por:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = \omega K - \dot{\theta} J \longrightarrow \Omega = 1/2 K - 1/4 J \quad [I]$$

Y su aceleración angular absoluta se define por:

$$\dot{\Omega} = \omega \dot{K} - \dot{\theta} \dot{J} = \omega \dot{\theta} \lambda = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\lambda \longrightarrow \dot{\Omega} = 1/8 \lambda \text{ rad./Seg2.} \quad [II]$$

Donde: ω y $\dot{\theta}$ Constantes. Además: $\dot{J} = \omega_{xyz} \times J = \omega K \times J = -\omega\lambda$

La aceleración del punto A en función de Ω y $\dot{\Omega}$ absolutas será:

$$a_A = a_0 + a_{A/0} = \bar{0} + \dot{\Omega} \times OA + \Omega \times (\Omega \times OA) \text{ --------- } [III]$$

Siendo: $OA = 8J + 2\,\text{Cos.}30 K - 2\,\text{Sen.}30 \lambda = 8J - \lambda + \sqrt{3}K \quad [IV]$

Sustituyendo las ecuaciones I, II y IV en III se deduce

$$a_A = \frac{1}{8}\lambda \times (8J - \lambda + \sqrt{3}K) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{4}J\right) \times \left[\left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{4}J\right) \times (8J - \lambda + \sqrt{3}K)\right]$$

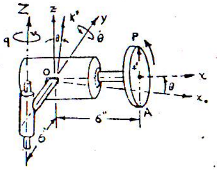
$$a_A = \left(K - \frac{\sqrt{3}}{8}J\right) + \left(-2J + \frac{1}{4}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{8}J - K - \frac{\sqrt{3}}{16}K + \frac{1}{16}\lambda\right)$$

$$a_A = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)\lambda - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\right)J - \frac{\sqrt{3}}{16}K$$

$$a_A = 0.3125\lambda - 2.436J - 0.1082K$$

Resp.

310.—El disco mostrado montado en el eje del motor gira con velocidad angular constante p = 30 rad./Seg. y a su vez el motor gira en torno al eje horizontal (y) a la razón constante $\dot{\theta}$ = 10 rad./Seg. Simultáneamente todo el conjunto gira alrededor del eje vertical Z a razón constante de q = 8 rad./Seg. Para el instante en el cual θ = 30°; calcular la aceleración angular del disco y la aceleración del punto A situado en la parte más baja del disco. Los ejes x, y, z están adheridos al armazón del motor y el plano O, Xo, y, es horizontal.



SOLUCION:

Por consideraciones del problema y según el gráfico:

$\dot{\phi}$ = P = 30 rad./Seg , $\dot{\psi}$ = q = 8 rad./Seg, $\dot{\theta}$ = 10 rad./Seg {constantes}

θ = 30°. , $K' = \text{Sen.}\,\theta\, i + \text{Cos.}\,\theta K$

La velocidad angular absoluta del disco está dada por:

$$\Omega = \omega_{xyz} + \Omega_r = [qK' - \dot{\theta}J] + P i = (q\,.\,\text{Sen.}\,\theta + P)i - \dot{\theta}J + q\,.\,\text{Cos.}\,\theta K$$

Y su aceleración angular absoluta será:

$$\dot{\Omega} = q\dot{\theta}\,.\,\text{Cos.}\,\theta i + (q\,.\,\text{Sen.}\,\theta + P)\dot{i} - \dot{\theta}\dot{j} - q\dot{\theta}\,.\,\text{Sen.}\,\theta K + q\,.\,\text{Cos.}\,\theta\dot{K}$$

Siendo:
$$\dot{i} = \omega_{xyz} \times i = [qK' - \dot{\theta}J] \times i = \dot{\theta}K + q\,\text{Cos.}\,\theta J$$
$$\dot{J} = \omega_{xyz} \times J = q\,.\,\text{Sen.}\,\theta K - q\,\text{Cos.}\,\theta i$$
$$\dot{K} = \omega_{xyz} \times K = -q\,.\,\text{Sen.}\,\theta J - \dot{\theta} i$$

Sustituyendo las ecuaciones deducidas y luego valores numéricos:

$$\dot{\Omega} = (q\,.\,\text{Sen.}\,\theta + P)(\dot{\theta}K + q\,.\,\text{Cos.}\,\theta J) - \dot{\theta}(q\,.\,\text{Sen.}\,\theta K - q\,.\,\text{Cos.}\,\theta i) - q\dot{\theta}\,.\,\text{Sen.}\,\theta K - q^2\,.\,\text{Sen.}\,\theta\,.\,\text{Cos.}\,\theta J$$

$$\dot{\Omega} = \left[8\left(\frac{1}{2}\right) + 30\right]\left[10K + 8\frac{\sqrt{3}}{2}J\right] - 10\left[8\left(\frac{1}{2}\right)K - 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right] - 8\left(\frac{1}{2}\right)(10)K - 64\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)J$$

$$\dot{\Omega} = 20\left[2\sqrt{3}\,i + 6\sqrt{3}\,J + 13K\right]$$ Resp

La aceleración absoluta de P está definida por la ecuación:

$$a_p = a_0 + \dot{\Omega} \times OP + \Omega \times (\Omega \times OP) \quad , \text{ Donde: } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[I]}$$

$$a_0 = \dot{q} \times BO + q \times (q \times BO) = \bar{0} - q^2 BO =$$

$$\equiv -(8)^2(6)J = -384J \; ; \quad [q \perp BO]$$

$$\dot{\Omega} \times OP_1 = 20\left[2\sqrt{3}\lambda + 6\sqrt{3}J + 13K\right] \times \left[6\lambda - 4K\right] =$$

$$= -480\sqrt{3}\lambda + \left[160\sqrt{3} + 1{,}560\right]J - 720\sqrt{3}K$$

$$\Omega \times [\Omega \times OP] = (34\lambda - 10J + 4\sqrt{3}K) \times \left[(34\lambda - 10J + 4\sqrt{3}K)\right.$$

$$\left. \times (6\lambda - 4K)\right] = \left\{(34\lambda - 10J + 4\sqrt{3}K) \times \right.$$
$$\left. (40\lambda + 177.5J + 60K)\right\}$$

$$\Omega \times [\Omega \times OP] = -1{,}832\lambda - 1{,}762J + 6{,}420K$$

Reemplazando estos valores en la ecuación [I]

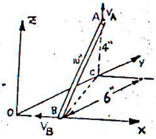
$$a_p = -(480\sqrt{3} + 1{,}832)\lambda - (384 - 160\sqrt{3} - 1{,}560 + 1{,}762)J +$$

$$(6{,}420 - 720\sqrt{3})K$$

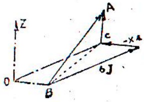
$$a_p = -2{,}662\lambda - 310J + 5{,}190K$$

Resp.

311.—Los extremos A y B de lá barra rígida de 10 Pulg. deslizan siguiendo las trayectorias horizontal y vertical como se indican. Si el punto A tiene una velocidad de 8 Pulg/Seg. dirigida hacia arriba cuando está a 4 Pulg. sobre el plano horizontal, determinar la velocidad correspondiente a B y la velocidad angular de la barra AB tratada como una línea.



SOLUCION:



SOLUCION:

Según el gráfico y datos se deduce:

$$BC = 2\sqrt{21} \longrightarrow (OB)^2 = (2\sqrt{21})^2 - 36 \longrightarrow OB = 4\sqrt{3} \text{ Pulg.}$$

La velocidad relativa de A respecto a B está definida por:

$$V_A = V_B + V_{A/B} \quad \text{.Donde:} \quad V_A = 8K \qquad V_B = -V_B I$$

Sustituyendo estos valores

$$8K = -V_B I + \Omega_{BA} \times BA$$

$$8K = -V_B I + [\Omega_x I + \Omega_y J + \Omega_z K] \times [6J - 4\sqrt{3} I + 4K]$$

$$8K = (4\Omega_y - 6\Omega_z - V_B)I - (4\Omega_x + 4\sqrt{3}\Omega_z)J + (6\Omega_x + 4\sqrt{3}\Omega_y)K$$

Igualando módulos de las componentes X,Y,Z, se obtiene las ecuaciones:

$$0 = 4\Omega_y - 6\Omega_z - V_B \quad \text{.........} \quad (I)$$

$$0 = 4\Omega_x + 4\sqrt{3}\Omega_z \quad \text{.........} \quad (II)$$

$$8 = 6\Omega_x + 4\sqrt{3}\Omega_y \quad \text{.........} \quad (III)$$

Además:

$$\Omega_{BA} \perp BA$$

$$\longrightarrow (\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z) \cdot (6J - 4\sqrt{3} I + 4K) = 0$$

Luego:

$$6\Omega_y - 4\sqrt{3}\Omega_x + 4\Omega_z = 0 \quad \text{.........} \quad (IV)$$

Resolviendo al sistema de ecuaciones I, II, III y IV se obtiene:

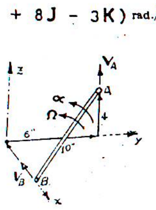
$$\Omega_y = 32/25\sqrt{3} \quad ; \quad \Omega_x = 12/25 \quad ; \quad \Omega_z = -12/25\sqrt{3}$$

$$V_B = -8\sqrt{3} I \text{ Pulg./Seg}$$

Por lo tanto:

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y + \Omega_z \rightarrow \Omega = 4/25\sqrt{3}(3\sqrt{3} I + 8J - 3K) \text{ rad./Seg}$$

312.—Utilizando el valor deducido para la velocidad angular de la barra en el problema anterior, y asumiendo que la velocidad de A es constante durante un corto intervalo de su movimiento; determinar la aceleración angular de la barra AB en la posición mostrada.



SOLUCION:

SOLUCION:

Las aceleraciones de A y B están relacionadas por la ecuación:

$$a_A = a_B + a_{A/B} = a_B + \alpha_{BA} \times BA + \Omega \times (\Omega \times BA) \qquad [I]$$

Siendo:

$$a_B = -a_B I \quad ; \quad a_A = \bar{0} \longleftarrow \{V_A = \text{constante.}\}$$

$$\alpha_{BA} \times BA = (\alpha_x I + \alpha_y J + \alpha_z K) \times (6J - 4\sqrt{3}I + 4K)$$

$$\alpha_{BA} \times BA = (4\alpha_y - 6\alpha_z) I - (4\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_z) J + (6\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_y) K$$

$$\Omega \times (\Omega \times BA) = \left(\frac{4}{25\sqrt{3}}\right)^2 (3\sqrt{3}I + 8J - 3K) \times [(3\sqrt{3}I + 8J - 3K) \times (6J - 4\sqrt{3}I + 4K)] =$$

$$= \left(\frac{4}{25\sqrt{3}}\right)^2 (3\sqrt{3}I + 8J - 3K) \times 50(\sqrt{3}K + I)$$

$$\Omega \times (\Omega \times BA) = 5.903\, I - 5.118\, J - 3.412\, K$$

Sustituyendo los valores deducidos, en la ecuación I y ordenando terminos:

$$\bar{0} = (-a_B + 4\alpha_y - 6\alpha_z + 5.903) I -$$

$$(4\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_z + 5.118) J + (6\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_y - 3.412) K$$

Identificando módulos de componentes iguales:

$0 = -a_B + 4\alpha_y - 6\alpha_z + 5.903$ ------------------ (A)

$0 = 4\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_z + 5.118$ ------------------ (B)

$0 = 6\alpha_x + 4\sqrt{3}\alpha_y - 3.412$ ------------------ (C)

Además: $\alpha_{BA} \perp BA \longrightarrow \alpha_{BA} . BA = 0$ Por lo tanto:

$0 = 6\alpha_y - 4\sqrt{3}\alpha_x + 4\alpha_z$ ------------------ (D)

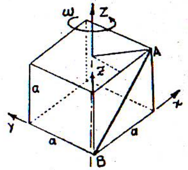
Resolviendo el sistema de ecuación A, B, C y D se obtiene:

$\alpha_x = 0$; $\alpha_y = 0.493$; $\alpha_z = -0.738$, $\boxed{a_B = 64/3\sqrt{3} \text{ Pulg./Seg2.}}$

Reuniendo términos vectorialmente:

$\alpha = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \longrightarrow \boxed{\alpha = 0.493\, J - 0.738\, K \text{ rad./Seg2.}}$

314.—El cubo rígido mostrado de arista a, gira en torno a su eje central con velocidad angular constante ω. Determinar la expresión de la velocidad angular y aceleración angular de la diagonal AB considerada como una línea.



SOLUCION:

Según la ecuación del movimiento relativo para las velocidades de A y B se afirma.

$$V_A = V_B + \Omega_{BA} \times BA \quad \text{.......... I}$$

Según el gráfico y enunciado se deduce:

$$V_A = \omega K \times \left[\frac{a}{2} I - \frac{a}{2} J\right]$$

$$V_A = \frac{a\omega}{2} I + \frac{a\omega}{2} J \quad \text{.......... II}$$

$$V_B = \omega K \times \left[-\frac{a}{2} I - \frac{a}{2} J\right]$$

$$V_B = \frac{a\omega}{2} I - \frac{a\omega}{2} J \quad \text{.......... III}$$

Reemplazando II y III en I se obtiene:

$$\frac{a\omega}{2} I + \frac{a\omega}{2} J = \frac{a\omega}{2} I - \frac{a\omega}{2} J + \Omega_{BA} \times BA$$

Reduciendo términos semejantes y dando valores a **BA:**

$$a\omega J = \left[\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z\right] \times \left[aI + aK\right]$$

$$a\omega J = -a\Omega_x J - a\Omega_y K + a\Omega_y I + a\Omega_z J$$

Igualando componentes en ambos miembros:

$$a\omega = -a\Omega_x + a\Omega_z \quad \text{.......... IV}$$

$$0 = a\Omega_y \quad \text{.......... V}$$

$$0 = -a\Omega_y \quad \text{.......... VI}$$

Y puesto que: $\Omega_{BA} \perp BA$ se tendrá: : $\Omega_{BA} \cdot BA = 0$

Luego:

$$\left[\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z\right] \cdot \left[aI + aK\right] = 0$$

$$a\Omega_x + a\Omega_z = 0 \quad \text{.......... VII}$$

Resolviendo el sistema IV V, VI y VII hallamos:

$$\Omega = \frac{\omega}{2}\left[K - I\right]$$

La aceleración angular será: $\alpha = \dot{\Omega}$ Luego:

$$\alpha = \frac{\omega}{2}\left[\dot{K} - \dot{i}\right]$$

Pero:

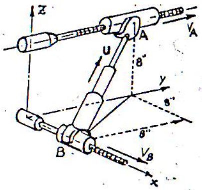
$$\dot{K} = \omega K \times K = 0$$
$$\dot{i} = \omega K \times i = \omega J$$

Luego:

$$\alpha = -\frac{\omega^2}{2} J$$

Resp.

315.—Los extremos A y B de la varilla telescópica mostrada están unidos a sus respectivos collares cuyas posiciones sobre sus ejes están controlados por dos tornillos guía. Si dichos tornillos están girando tal que A y B se mueven simultáneamente a razón de 6 Pulg./Seg. en las direcciones indicadas; determinar la velocidad angular de la línea central de la varilla AB en el instante para el cual x = y = 8 Pulg.



SOLUCION:

Las velocidades de A y B están relacionadas por la ecuación:

[I] .... $V_A = V_B + V_{A/B} + U$. donde **U** es la velocidad relativa debido al movimiento entre los anillos en la dirección de BA.

Además: $BA = 8J - 8i + 8K \longrightarrow e_r = \frac{BA}{|BA|} = \frac{J - i + K}{\sqrt{3}}$

$V_A = V_B = 6$ Pulg./Seg ; $V_{A/B} = \Omega_{BA} \times BA$; $U = Ue_r$

Sustituyendo los valores hallados, en la ecuación I:

$$6J = 6i + (\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z) \times 8(J - i + K) + U/\sqrt{3}(J - i + K)$$

$$6J = \left(6 + 8\Omega_y - 8\Omega_z - \frac{U}{\sqrt{3}}\right)i - \left(8\Omega_x + 8\Omega_z - \frac{U}{\sqrt{3}}\right)J +$$

$$\left(8\Omega_x + 8\Omega_y + \frac{U}{\sqrt{3}}\right)K$$

Igualando módulos de las direcciones x, y, z :

$$0 = 6 + 8\Omega_y - 8\Omega_z - U/\sqrt{3} \quad \text{[A]}$$

$$6 = -8\Omega_x - 8\Omega_z + U/\sqrt{3} \quad \text{[B]}$$

$$0 = 8\Omega_x + 8\Omega_y + U/\sqrt{3} \quad \text{[C]}$$

Además: $\Omega_{BA} \perp BA \longrightarrow \Omega_{BA} \cdot BA = 0$, En consecuencia:

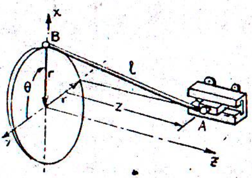
$$0 = -8\Omega_x + 8\Omega_y + 8\Omega_z \quad \text{[D]}$$

Resolviendo el sistema A, B, C y D se obtiene:

$$\Omega_x = -\frac{1}{4} \;;\; \Omega_y = -\frac{1}{4} \;,\; \Omega_z = 0 \;;\; U = 4\sqrt{3} \text{ Pulg./Seg}$$

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y + \Omega_z \longrightarrow \Omega = -\frac{1}{4}(I + J)_{\text{rad./Seg}} \text{ Resp.}$$

316.—El disco mostrado gira en torno al eje Z sobre el plano XY con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$. La barra delgada AB está conectada a la periferia del disco y a la corredera A por medio de articulaciones de bola. A se mueve en el plano YZ a una distancia r paralela a Z. Determinar las componentes de la velocidad angular de la línea central de la barra AB y la velocidad z de A en el instante en que $\theta = \pi/2$.



SOLUCION:

Para la condición $\theta = \pi/2$. y según el gráfico se deduce:

$$V_B = \dot{r} I - r\dot{\theta} J = -r\omega J \quad ; \quad V_A = \dot{Z}K$$

$$BA = (-rI - rJ + ZK) \quad \text{donde} \quad Z = \sqrt{\ell^2 - 2r^2} \quad \text{(A)}$$

Las velocidades de A y B están relacionadas por la ecuacion:

$$V_A = V_B + V_{A/B} = V_B + \Omega_{BA} \times BA$$

Sustituyendo valores deducidos:

$$\dot{Z}K = -r\omega J + (\Omega_x I + \Omega_y J + \Omega_z K) \times (-rI - rJ + ZK)$$

$$\dot{Z}K = (Z\Omega_y + r\Omega_z)I - (r\omega + Z\Omega_x + r\Omega_z)J - r(\Omega_x - \Omega_y)K$$

Igualando módulos de las componentes X,Y,Z, se obtiene las ecuaciones:

$0 = Z\Omega_y + r\Omega_z \longrightarrow \Omega_y = -r\Omega_z/Z$ ....[I]

$0 = r\omega + Z\Omega_x + r\Omega_z \longrightarrow \Omega_x = -r(\omega + \Omega_z)/Z$ ....[II]

$\dot{Z} = -r\Omega_x + r\Omega_y \longrightarrow \dot{Z} = r(\Omega_y - \Omega_x)$ ....[III]

Además: $\Omega_{BA} \perp BA \longrightarrow \Omega_{BA}.BA = 0$. Por tanto:

$0 = -r\Omega_x - r\Omega_y + Z\Omega_z \longrightarrow \Omega_z = (\Omega_x + \Omega_y)r/Z$ .... [IV]

Resolviendo el sistema de ecuaciones A, I, II, III y IV se obtiene:

$$\Omega_x = \frac{r^2 - \ell^2}{\ell^2\sqrt{\ell^2 - 2r^2}}\, r\omega$$

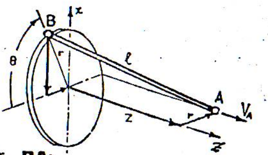
$$\dot{Z} = \frac{r^2\omega}{\sqrt{\ell^2 - 2r^2}}$$

$$\Omega_y = \frac{r^3\omega}{\ell^2\sqrt{\ell^2 - 2r^2}}$$

$$\Omega_z = -\frac{r^2\omega}{\ell^2}$$

Resp.

317.—Considerando los datos del problema anterior, determinar la velocidad $\dot{z}$ de A, para cualquier instante en función de θ.



SOLUCION:

Del diagrama se deduce el valor del vector **BA**:

$BA = -r\,\text{Sen.}\theta\, \mathbf{I} - (r\,\text{Cos.}\theta + r)\mathbf{J} + z\mathbf{K}$

El módulo de **BA** es ℓ . Por lo tanto:

$\ell^2 = [r\,\text{Sen.}\theta]^2 + [r\,\text{Cos.}\theta + r]^2 + z^2$; [r y ℓ son constantes]

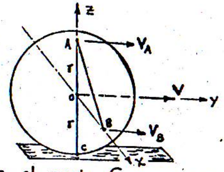
$\ell^2 = 2r^2 + 2r^2\text{Cos.}\theta + z^2 \longrightarrow z = [\ell^2 - 2r^2(1 + \text{Cos.}\theta)]^{1/2}$

Derivando respecto al tiempo: $\dot{z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2r^2\dot{\theta}.\text{Sen.}\theta}{[\ell^2 - 2r^2(1 + \text{Cos.}\theta)]^{1/2}}$

y puesto que: $\dot{\theta} = \omega$ se tendrá:

$$\boxed{\dot{z} = \frac{r^2\omega\ \text{Sen.}\theta}{\sqrt{\ell^2 - 2r^2(1 + \text{Cos.}\theta)}}}$$

684.—Todos los puntos del eje diametral x de la esfera maciza mostrada de radio r, tienen velocidad constante V en la dirección del eje (y). Determinar la velocidad angular instantánea de la línea AB que une los puntos A y B situados en la periferia de la esfera sobre los ejes indicados. El plano x, y, es paralelo a la superficie de desplazamiento.



SOLUCION:

Para el instante representado consideremos el punto C como centro instantáneo de velocidades. En consecuencia:

$$\frac{V}{r} = \frac{V_A}{2r} \longrightarrow V_A = 2V$$

Del gráfico se deduce: $V_A = 2VJ \quad , V_B = VJ$ .... (1)

Estas velocidades están relacionadas por la ecuación :

$$V_A = V_B + V_{A/B} = V_B + \Omega_{BA} \times BA$$

Según (1) $2VJ = VJ + (\Omega_x I + \Omega_y J + \Omega_z K) \times (rK - rI)$

$$VJ = r\Omega_y I - r(\Omega_x + \Omega_z)J + r\Omega_y K$$

Igualando componentes :

$$V = -r\Omega_x - r\Omega_z \quad \text{..........................} \quad (2)$$

$$0 = -r\Omega_y \quad \text{..........................} \quad (3)$$

Se sabe además que: $\Omega_{BA} \perp BA \longrightarrow \Omega_{BA} \cdot BA = 0$

Por lo tanto: $(\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z)(rK - rI) = 0 \rightarrow r\Omega_z - r\Omega_x = 0$ (4)

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2, 3 y 4 se obtiene:

$$\Omega_x = -\frac{V}{2r} \quad ; \quad \Omega_y = 0 \quad ; \quad \Omega_z = -\frac{V}{2r}$$

Reuniendo términos vectorialmente: $\Omega_{BA} = -\frac{V}{2r}(I + K)$

donde $\Omega_{BA} = \sqrt{\frac{V^2}{4r^2} + \frac{V^2}{4r^2}} \longrightarrow \Omega_{BA} = \frac{V}{r\sqrt{2}}$ Resp.

685.—Para las mismas condiciones del problema anterior; deducir la expresión de la aceleración angular de la línea AB.

SOLUCION:

En el problema anterior se dedujo:

$\Omega_{BA} = -\frac{V}{2r}(I + K) \quad , \quad \omega = -\frac{V}{r} I$ [Ver gráfico]

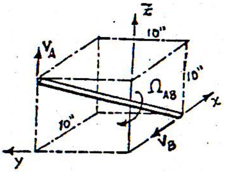
La aceleración angular será: $\alpha = \dot{\Omega}_{BA}$; O sea:

$$\dot{\Omega}_{BA} = -\frac{V}{2r}(\dot{\imath} + \dot{K}), \quad \text{donde:} \quad \dot{\imath} = \omega \times \imath = 0$$

$$\dot{K} = \omega \times K = \frac{V}{r} J$$

$$\dot{\Omega}_{BA} = -\frac{V}{2r}\left(0 + \frac{V}{r}J\right) \longrightarrow \alpha = -\frac{V^2}{2r^2} J \qquad \text{Resp.}$$

686.—Los extremos A y B de la barra AB están obligados a desplazarse a lo largo de los ejes z—z y x—x respectivamente en los sentidos indicados. Si para el instante representado la barra coincide con la diagonal del cubo de 10 pulg. de arista y la velocidad de A es de 4 pulg./seg., constante para un pequeño intervalo de su movimiento; determinar la velocidad angular de la línea central de la barra.



SOLUCION:

Según la ecuación de velocidades relativas:

$$V_A = V_B + V_{A/B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

Observando el gráfico se deduce:

$$V_A = 4K \quad \text{pulg/seg}$$

$$V_B = V_B \imath \quad \text{pulg/seg}$$

$$V_{A/B} = \Omega_{BA} \times BA$$

$$BA = 10[-\imath + J + K] \quad \text{pulg.}$$

Reemplazando valores en la ecuación I:

$$4K = -V_B\imath + [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \times 10[-\imath + J + K]$$

$$4K = -V_B\imath + 10[\Omega_x K - \Omega_x J + \Omega_y K + \Omega_y \imath - \Omega_z J - \Omega_z \imath]$$

Igualando componentes en ambos miembros:

$$4 = 10[\Omega_x + \Omega_y] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$0 = -V_B + 10\Omega_y - 10\Omega_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$0 = -10\Omega_x - 10\Omega_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\Omega_{BA} \perp BA \longrightarrow \Omega_{BA} \cdot BA = 0$$

$$[\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \cdot 10(-\imath + J + K) = 0$$

$$0 = -\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 1,2,3 y 4 se deduce:

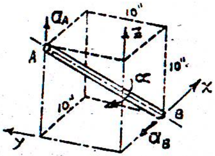
$$\Omega_x = -\Omega_z = \frac{2}{15}$$

$$\Omega_y = \frac{4}{15}$$

Sumando las componentes:

$$\Omega = \frac{2}{15}[\imath + 2J - K] \quad \text{rad/seg.} \qquad \text{Resp.}$$

687.—Para las mismas condiciones del problema anterior deducir la expresión de la aceleración angular de la línea central de la barra AB.



SOLUCION:

En el problema anterior se obtuvo:

$$\Omega = 2/15\,(\lambda + 2J - K) \text{ rad./Seg.}$$

La ecuación de la aceleración relativa entre A y B es

$$a_A = a_B + a_{A/B} = a_B + \alpha \times BA + \Omega \times (\Omega \times BA) \quad \text{.........} \; [I]$$

Donde según el diagrama $BA = 10(-\lambda + J + K)$

$$a_B = -a_B \lambda \quad ; \; a_A = \overline{0} \quad [V_A = \text{constante}]$$

$$\alpha \times BA = (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) \times 10(-\lambda + J + K) =$$

$$10(\alpha_x K - \alpha_x J + \alpha_y K + \alpha_y \lambda - \alpha_z J - \alpha_z \lambda)$$

$$\Omega \times (\Omega \times BA) = (2/15)^2 (\lambda + 2J - K) \times [(\lambda + 2J - K) \times$$

$$10(-\lambda + J + K)] = 16/15\,(\lambda - J - K)$$

Sustituyendo en la ecuación I los valores deducidos y ordenando:

$$\overline{0} = \left[-a_B + 10(\alpha_y - \alpha_z) + \frac{16}{15}\right]\lambda - \left[10(\alpha_x + \alpha_z) + \frac{16}{15}\right]J +$$

$$\left[10(\alpha_x + \alpha_y) - \frac{16}{15}\right]K$$

Igualando módulos en ambas direcciones equivalentes:

$$-a_B + 10\alpha_y - 10\alpha_z + 16/15 = 0 \quad \text{.................} \quad (A)$$

$$10\alpha_x + 10\alpha_z + 16/15 = 0 \quad \text{.................} \quad (B)$$

$$10\alpha_x + 10\alpha_y - 16/15 = 0 \quad \text{.................} \quad (C)$$

Además: $\Omega_{BA} \perp BA \longrightarrow \Omega_{BA} . BA = 0$

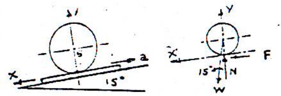
$$(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) . 10(-\lambda + J + K) = 0 \rightarrow -\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 0 \quad (D)$$

Resolviendo el sistema A, B, C y D se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_x = 0 \\ \alpha_y = 8/75 \\ \alpha_z = -8/75 \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha = 8/75\,(J - K) \text{ rad./Seg2.}$$

Resp.

322.—Hallar la aceleración de la plancha A sobre la cual se encuentra el cilindro mostrado, cuyo centro G se mantiene fijo durante el movimiento. El rozamiento entre el cilindro y la plancha evita el deslizamiento.



Aplicando la ecuación del movimiento en el eje "x" $[F_x = m.a]$

$$F + W.\text{Sen}\,15 = m.a \longrightarrow -F = W\,\text{Sen}.15 - m.a \qquad [I]$$

Aplicando la ecuación de momentos respecto a G. $[M = I\alpha]$

$$Fr = \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{a}{r}\right] \longrightarrow F = m.a/2$$

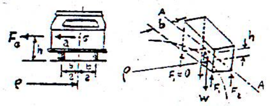
Siendo : $a = \alpha r$; $I_G = 1/2\,mr^2$ [Ver apéndice]

Eliminando F de las ecuaciones I y II y dando valores numéricos:

$$a - a/2 = g.\text{Sen}.15$$

$$a = 2(32.2)(0.258) \longrightarrow a = 16.64 \text{ pies/Seg2.} \quad \text{Resp.}$$

323.—Un microbús se mueve en la trayectoria circular mostrada, cuyo radio de curvatura es ρ. La separación de las ruedas es b y la altura del centro de gravedad sobre el piso es h. Determinar la velocidad con la cual debe moverse dicho microbús para que la fuerza vertical de las ruedas interiores se reduzca a cero. (Condición de volcadura).



Según el principio de D'Alambert el momento producido por la fuerza inercial de su centro de masa será:

$$\Sigma M_{AA} = F_G \cdot h = ma.h \quad \text{..............................} \quad [I]$$

Donde según el diagrama y definiciones:

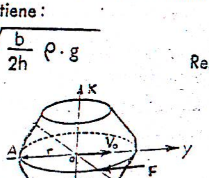
$$\Sigma M_{AA} = W(b/2) \quad ; \quad m = (w/g)$$

$$a = (V^2/\rho) = \text{aceleración normal}$$

Sustituyendo valores en la ecuación I se obtiene:

$$W(b/2) = \frac{w}{g}\left[\frac{V^2}{\rho}\right]h \longrightarrow V = \sqrt{\frac{b}{2h}\rho \cdot g} \qquad \text{Resp.}$$

326.—En el instante mostrado la cápsula espacial rota con velocidad angular constante ω y su centro de masa se desplaza con velocidad Vo en la dirección del eje (y). Si en este instante se proyecta un chorro de gas cuya fuerza es F, determinar la aceleración absoluta del punto A situado en la periferia de la cápsula de masa m y cuyo radio de giro al rededor del eje Z es K.



La aceleración absoluta de A está definida por la ecuación:

$$a_A = a_0 + \alpha \times r + \Omega \times (\Omega \times r) \quad \text{......................} \quad (A)$$

Según el diagrama de cuerpo libre se deduce:

$$\alpha \times r = \alpha K \times (-rJ) = \alpha r I \quad \text{......................} \quad (B)$$

$$\Omega \times (\Omega \times r) = \Omega K \times [\Omega K \times (-rJ)] = \Omega^2 rJ \quad \text{......................} \quad (C)$$

Aplicando la ecuación de momentos respecto al centroide O:

$\Sigma M_O = I_O \alpha$ donde $I_o = m.K^2$

$-r.F = K.^2 m.\alpha \longrightarrow \alpha = -\frac{rF}{mK^2}$ .... (C)

Sustituyendo la ecuación I en B:

$$\alpha \times r = -\frac{r^2 F}{K^2 m} \lambda \quad \text{.................................} \quad (D)$$

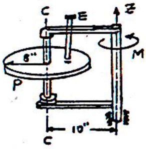
Aplicando la ecuación del movimiento en el eje Y:

$\Sigma Fy = m.a_o \longrightarrow -FJ = m a_o \longrightarrow a_o = -\frac{F}{m} J$ (E)

Reemplazando las ecuaciones C, D y E en A se deduce:

$$a_A = -\frac{r^2 F}{K^2 m} \lambda - \left[\frac{F}{m} - \Omega^2 r\right] J \quad \text{Resp.}$$

327.—El cilindro macizo P pesa 94 Lb. y está montado en el eje CC, el cual gira al rededor del eje vertical Z por acción del momento M de 30 Lb. pie. El cilindro puede independizar su movimiento retirando la clavija E. Hallar la aceleración angular del armazón A: a) Cuando la clavija E fija a P; b) Cuando E no fija a P. El peso del armazón y los rozamientos son despreciables.



a) Cuando E fija a P:

Aplicando la ecuación de momentos respecto al eje z:

[I] $M_z = I_z \alpha$, donde: $I_z = I_G + md^2$ [Por Steiner:]

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2 + md^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{94}{32.2}\right)\left(\frac{8}{12}\right)^2 + \left(\frac{94}{32.2}\right)\left(\frac{10}{12}\right)^2 = 2.68$$

Según la ecuación [I]:

$$\alpha = \frac{M_z}{I_z} = \frac{30}{2.68} \longrightarrow \alpha = 11.21 \text{ rad./Seg2.} \quad \text{Resp.}$$

b). Cuando E no fija a P:

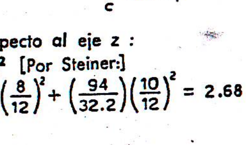
De acuerdo al principio de D'Alembert: $\Sigma M_z = F_G d$

Luego $M = m a.d = W\alpha d^2/g$ .Donde: $a = \alpha d$, $m = W/g$

Sustituyendo valores numéricos:

$$30 = \frac{94}{32.2}\left(\frac{10}{12}\right)^2 \alpha \longrightarrow \alpha = 14.8 \text{ rad./Seg2.} \quad \text{Resp.}$$

334.—El rollo de papel mostrado de forma de cilindro sólido cuyo peso es 20 Lb. y diámetro 10 pulg. descanza en la superficie horizontal. Si se aplica una fuerza de 6 Lb. en el extremo del papel que forma ángulo θ = 30° con el plano horizontal; hallar la aceleración inicial a del centro del rollo y la aceleración angular correspondiente. El coeficiente de fricción entre ambas superficies es 0.2.



SOLUCION:

En la dirección vertical el sistema está en equilibrio. Por tanto:

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N + 6 \text{ Sen.}\,\theta - W = 0$

$$N = 20 - 6\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow N = 17 \text{ Lb.} \quad (1)$$

Siendo f la fuerza de rozamiento se afirma:

Según (1) : $f = \mu N = 0.2\,(17) \longrightarrow f = 3.4 \text{ Lb.}$ (2)

Aplicando la ecuación del movimiento en la dirección horizontal:

$\Sigma F_x = m a \longrightarrow -f + 6.\text{Cos.}\,\theta = m.a$

Según (2) y datos: $a = \dfrac{-3.4 + 3\sqrt{3}}{20/32.2} \longrightarrow a = 2.898$ pies/Seg2.

Aplicando la ecuación de momentos respecto al cetro de gravedad G:

$-M_g = I_o.\,\alpha$, donde: I_o = Momento de inercia del cuerpo.

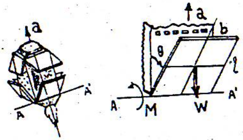
Luego: $\Sigma M_G = 3.4(5/12) - 6(5/12) = -13/12$ Lb. pies .... (3)

$$I_o = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(20/32.2)(5/12)^2 = 0.0537 \text{ .... } (4)$$

$$\alpha = \frac{(3)}{(4)} = -\frac{13/12}{0.0537} \longrightarrow \alpha = 20.1 \text{ rad./Seg2.}$$

[Sentido antihorario]

339.—La cápsula de investigación espacial mostrada tiene un motor cohete que le proporciona una aceleración lineal de magnitud a en la dirección de su eje. Las tapas de superficie b x ℓ se abren automáticamente como se indica. Determinar la ecuación del momento M en función de θ, que debe aplicarse a la tapa respecto al eje AA' tal que la aceleración angular tenga como valor $\ddot{\theta}$. Las tapas son placas delgadas uniformes de densidad ρ.



Aplicando la ecuación de momentos respecto al eje AA^1:

$\Sigma M_{AA'} = I_o \alpha$ donde , $I_o = \frac{1}{3} m r^2$ { Ver en apéndice }

Además : $m = \rho.b.r$; $\alpha = \ddot{\theta}$

Por lo tanto según el diagrama:

$$W\left(\frac{r}{2}\right)\text{Sen.}\,\theta - M = \frac{1}{3}(\rho b r)\, r^2 \ddot{\theta} \longrightarrow M = \frac{1}{2} r W \text{ Sen.}\,\theta - \frac{1}{3}\rho b r^3 \ddot{\theta} \quad [I]$$

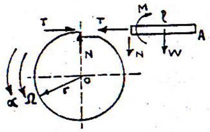
Según la ecuación del movimiento en la dirección y :

$\Sigma F_y = m.\,a. \longrightarrow W = \rho b r a$ .... [II]

Sustituyendo (II) en la ecuación (I) :

$$M = \frac{1}{2} a b \rho r^2 \text{ Sen.}\,\theta - \frac{1}{3}\rho b r^3 \ddot{\theta} \longrightarrow M = \rho b r^2\left[\frac{a}{2}\text{ Sen}\,\theta - \frac{1}{3} r \ddot{\theta}\right]$$

355.—La barra delgada de espesor uniforme y longitud ℓ cuyo peso es W está soldada por un extremo tangente al borde de un disco de radio r, el cual gira en torno a un eje vertical que pasa por su centro O. Calcular el momento flector M, la fuerza cortante N y la fuerza axial T que ejerce la soldadura sobre la barra en los siguientes casos: a.— Cuando la velocidad angular ω del disco es uniforme, y b.— Cuando el disco parte del reposo con aceleración angular α en sentido antihorario.



SOLUCION:

Caso a): Cuando el disco rota con Ω constante [Ver diagrama]

La ecuación de la aceleración normal de B es: $a_n = r\Omega^2$

La 2da. ecuación del movimiento para este punto es:

$$\Sigma F_n = m.a_n = (W/g)a_n$$

Por tanto, puesto que: $\Sigma F_n = N \longrightarrow \boxed{N = (W/g)r\Omega^2}$

Tomando momentos en G: $\Sigma M_G = N(\ell/2) = M \longrightarrow \boxed{M = Wr\ell\Omega^2/2g}$

Tomando momentos en O: $\Sigma M_O = T(r) = M \longrightarrow \boxed{T = W\ell\Omega^2/2g}$

Caso b): Cuando rota con α se tiene:

En B: $\Sigma F_t = T = m.a_t = m.r\alpha \longrightarrow \boxed{T = Wr\alpha/g}$

Tomando momentos en A:

$$\Sigma M_A = -M = I_O\alpha = \left[\frac{1}{3}m\ell^2\right]\alpha \longrightarrow \boxed{M = -W\ell^2\alpha/3g}$$

Tomando momentos en G: $\Sigma M_A = I_G\alpha$

$$N(\ell/2) - M = (1/12)(m\ell^2)\alpha \longrightarrow \boxed{N = -W\ell\alpha/2g}$$

TRABAJO Y ENERGIA

Trabajo : $W = \int_A^B \mathbf{F_x}\,dx + \mathbf{F_y}\,dy + \mathbf{F_z}\,dz$

Energía Cinética, cuando un cuerpo solo se **traslada** : $(W = T)$

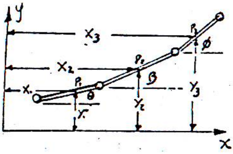
$$T = \int m(\dot{x}d\dot{x} + \dot{y}d\dot{y} + \dot{z}d\dot{z}) = \frac{1}{2}m\,(v_B^2 - v_A^2)$$

y cuando solo **rota:** $T = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\int r^2\,dm = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{I\Omega^2}{2}$

NOTA : Si el cuerpo rota y se traslada se suman ambas ecuaciones.

Energía Potencial, $\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{F}.\,d\mathbf{r} = -mg(\Delta H)$

361.—Determinar la ecuación de la energía cinética total del sistema de las tres barras indicadas de igual peso e igual momento de inercia (respecto a su centro de masa cuya posición se indica mediante los puntos P_1, P_2, P_3); en función de las coordenadas mostradas.



SOLUCION:

La energía cinética total del sistema está definida por:

$$T = \Sigma_n \frac{1}{2} mV^2 + \Sigma_n \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad , \text{ donde } n = 1,2,3 \qquad [I]$$

Por lo tanto, considerando que: $V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$

$$\Sigma_n \frac{1}{2} mV^2 = \frac{m_1}{2}(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + \frac{m_3}{2}(\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2)$$

donde: $m_1 = m_2 = m_3 = m$ (Condición del problema)

$$\Sigma_n \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\phi}^2$$

donde: $I_1 = I_2 = I_3 = I = K^2 m$

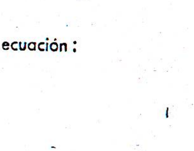
[condición del problema]

Sustituyendo en la ecuación (I) los valores deducidos se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 + \dot{X}_3^2 + \dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2 + \dot{Y}_3^2 + K^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\phi}^2) \right]$$

Resp.

362.—La parábola rígida mostrada está definida por la ecuación $Z = ar^2$, y está fija al eje vertical que rota con velocidad ω. La bola perforada de masa m resbala libremente a lo largo de la parábola. Asumiendo que el momento de inercia del conjunto es I, determinar la ecuación de la energía cinética del sistema.



SOLUCION:

El vector posición de m está definido por la ecuación:

$$\mathbf{r} = r\lambda + Z\mathbf{K} = r\lambda + ar^2\mathbf{K}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{r} = \dot{r}\lambda + r\dot{\lambda} + 2ar\dot{r}K + ar^2\dot{K} = V$$

Donde:
$$\dot{\lambda} = \omega \times \lambda = \omega K \times \lambda = \omega J$$
$$\dot{K} = \omega \times K = \omega K \times K = 0$$

$$V = \dot{r}\lambda + r\omega J + 2ar\dot{r}K \text{ , Cuyo módulo será:}$$

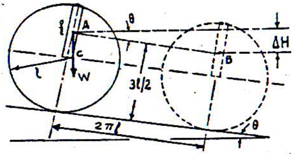
$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4a^2r^2\dot{r}^2$$

La energía cinética está definida por la ecuación:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{, Por lo tanto :}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4a^2r^2\dot{r}^2) + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ .... Resp.}$$

366.—Una barra delgada de metal de longitud ℓ y peso w está soldada por su extremo a la periferia del aro de radio ℓ mostrado. Si dicho aro parte del reposo cuando la posición de la barra es perpendicular a la superficie de apoyo; suponiendo que no hay deslizamiento y que el peso del aro es despreciable; calcular la velocidad del centro del aro luego de haber realizado una revolución completa.



SOLUCION:

La ecuación que relaciona trabajo y energía entre A y B es:

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V + \Delta Q \quad \text{------------------------------ [I]}$$

Donde:

$\Delta U = 0$ (No actúan fuerzas externas) ------------- (A)

$\Delta Q = 0$ (Las fuerzas de fricción se desprecian) ------ (B)

Cálculo de la energía potencial:

$$\Delta V = -W.\Delta H = -2mg\pi\ell \,\text{Sen.}\theta \quad \text{Siendo: } \begin{cases} W = mg \\ \Delta H = 2\pi\ell \cdot \text{Sen. } \theta \end{cases} \quad \text{(C)}$$

Cálculo de la energía cinética: (Parte del reposo)

$$\Delta T = \frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}I_o\Omega^2 \text{ Donde: } \begin{cases} V_B = \text{ velocidad de la varilla.} \\ I_o = m\ell^2/12 \quad \text{(Ver apéndice)} \end{cases}$$

Además por centro instantáneo : $\frac{V_B}{3\ell/2} = \frac{V_c}{\ell} = \Omega \longrightarrow \begin{cases} V_B = 3V_c/2 \\ \Omega = V_c/\ell \end{cases}$

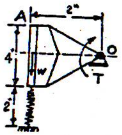
Por tanto:

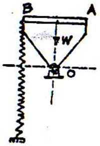
$$\Delta T = \frac{1}{2}m(3V_c/2)^2 + \frac{1}{2}(m\ell^2/12)(V_c/\ell)^2 \longrightarrow \Delta T = 7mV_c^2/6 \quad \textbf{(D)}$$

Sustituyendo las ecuaciones A, B, C y D en I se obtiene:

$$0 = \frac{7}{6}mV_c^2 - 2mg\pi\ell \cdot \text{Sen.}\theta \longrightarrow \boxed{V_c = 2\sqrt{\frac{3\pi g\ell \cdot \text{Sen.}\,\theta}{7}}}$$

368.—La puerta en sección AB de 200 Lb. de peso, de 4 x 6 pies y de espesor uniforme es sostenida por un entramado de peso despreciable, que está articulado mediante un eje que pasa por O como se indica. Para este instante el resorte de constante recuperadora K = 40 Lb./pie tiene su longitud normal. Calcular la velocidad angular de la puerta cuando alcance la posición horizontal por acción del momento T = 600 Lb./pie aplicado al entramado a partir del reposo.





SOLUCION:

El trabajo y la energía están relacionados por la ecuación:

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V \quad \text{..........} \quad [I]$$

El trabajo producido por el momento externo será:

$$\Delta U = T.\Delta\theta = 600.\frac{\pi}{2} = 300\pi \text{ Lb. pies} \quad \text{..........} \quad [A]$$

La variación de energía cinética estará definido por la ecuación:

$$\Delta T = \frac{1}{2}I_o\Omega^2 = \frac{1}{2}[I_c + md^2]\Omega^2 \quad \text{..........} \quad [II]$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m(4)^2 + m(2)^2\right]\Omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{12}\cdot\frac{200}{32.2} + \frac{200}{32.2}(4)\right]\Omega^2 = 16.55\Omega^2$$

La variación de la energía potencial dependerá del miembro elástico y de la energía gravitatoria. Por tanto:

$$\Delta V = \Delta V_e + \Delta V_g$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}K.x^2 = \frac{1}{2}(40)(4)^2 = 320 \text{ Lb. pies} \quad \text{..........} \quad [III]$$

$$\Delta V_g = W.\Delta h = 200(2) = 400 \text{ Lb. pies} \quad \text{..........} \quad [IV]$$

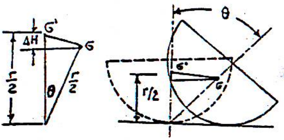
Reemplazando II, III y IV en las ecuaciones I y (A) se deduce:

$$300\pi = 16.55\,\Omega^2 + 400 + 320$$

Donde finalmente:

$$\Omega = 3.67 \text{ rad./Seg} \qquad \text{Resp.}$$

371.—La cáscara semi-esférica de radio r mostrada, se suelta del reposo desde la posición en la cual su eje de simetría forma ángulo θ con el eje vertical. Suponiendo que no resbala, determinar la velocidad angular de dicha cáscara cuando pasa por la posición de equilibrio ($\theta = 0$).



SOLUCION:

Puesto que no actúan fuerzas externas ni de fricción, el sistema es conservativo. Por tanto se cumplirá: $\Delta T = \Delta V$ [I]

Cálculo de la energía potencial : (Ver diagrama).

$\Delta V = mg.\Delta H = mg(r/2)(1 - \text{Cos. } \theta)$ Donde: $\Delta H = (r/2) - (r/2) \text{ Cos. } \theta$

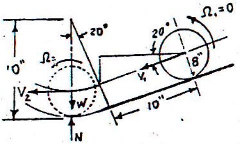
Cálculo de la energía cinética: (El cuerpo solo rota)

$$\Delta T = \frac{1}{2} I_o \Omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} mr^2\right)\Omega^2 \qquad \text{Siendo: } I_o = \frac{2}{3} mr^2$$

Sustituyendo en la igualdad (I), los valores deducidos se obtiene:

$$\frac{1}{3} mr^2\Omega^2 = \frac{1}{2} mgr(1 - \text{Cos. } \theta) \longrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{3g}{2r}(1 - \text{Cos. } \theta)}$$

374.—La esfera sólida en la posición mostrada tiene una velocidad de 2 pies/seg., desplazándose sobre el plano inclinado 20° respecto a la horizontal. Determinar la fuerza normal N que se ejerce sobre ella cuando pasa por la posición inferior A, suponiendo que rueda sin resbalar.



SOLUCION:

Puesto que no actúan fuerzas externas la ecuación que relaciona trabajo y energía se reduce a : $\Delta T + \Delta V = 0$ ---------[I]

Cálculo de la energía cinética :

$$\Delta T = \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{2} I_o(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)$$

Siendo: $I_o = (2/5)mr^2$, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = V_2/r$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\left(\frac{V_2^2}{r^2} - 0\right) =$$

$$= \frac{V_2^2}{2} m\left(1 + \frac{2}{5}\right) - \frac{V_1^2 m}{2}$$

$$\Delta T = \frac{V_2^2}{2}\left(\frac{480}{32.2 \times 12}\right)\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{480}{32.2 \times 12}\right)(4) = 0.865\ V_2^2 - 2.5 \cdots [A]$$

Cálculo de la energía potencial: { Ver diagrama }

$$\Delta V = -W.\Delta H \quad \text{Siendo: } \Delta H = 10 \text{ Sen. } 20 + (10 - 10 \text{ Cos.} 20)$$

$$\Delta H = 3.41 + 10(1 - 0.94) = 4.01$$

$$\Delta V = -480(4.01) = -1{,}920 \text{ .... } [B]$$

Sustituyendo las ecuacionesA y B en I se obtiene:

$$0.865\ V_2^2 - 2.5 - 1{,}920 = 0 \longrightarrow V_2^2 = 2{,}225 \text{ pies}^2/\text{Seg2.} \text{ .... (II)}$$

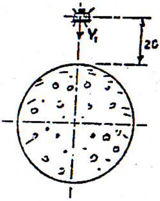
Aplicando la ecuación del movimiento normal al punto inferior C:

$$\Sigma F_n = m.a_n \longrightarrow N - W = m V_2^2/r$$

Sustituyendo valores numéricos se obtiene: (Según II)

$$N = 480 + \frac{480}{32.2 \times 12} \cdot \frac{2{,}225}{8} \longrightarrow N = 828 \text{ Lb.} \qquad \text{Resp.}$$

706.—En un descenso vertical sobre la superficie lunar, la cápsula espacial mostrada desacelera mediante sus retrocohetes hasta alcanzar una velocidad de 6 pies/seg. cuando está a 20 pies sobre la superficie. Si en este instante se interrumpe el empuje de la cápsula caendo libremente desde dicha altura; calcular la velocidad del impacto sobre la superficie. (La aceleración de la gravedad Lunar es de 5.32 pies/seg.²).



SOLUCION:

Aplicando la ecuación general de la energía: $\Delta U = \Delta T + \Delta V$ (1)

Según el gráfico y enunciado se deduce:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) = \frac{m}{2}(V_2^2 - 36) \text{ .... } (2)$$

$$\Delta V = -mg.\Delta H = -m(5.32)(20) = -106.4\ m \text{ .... } (3)$$

$$\Delta U = 0 \quad (\text{No actúan fuerzas externas}) \text{ .... } (4)$$

Reemplazando las ecuaciones 2, 3 y 4 en (1) se obtiene:

$$0 = \frac{m}{2}(V_2^2 - 36) - 106.4\ m$$

$$V_2 = \sqrt{212.8 + 36} \longrightarrow V_2 = 15.77 \text{ pies/Seg.} \qquad \text{Resp.}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO, MOMENTO CINETICO y MOMENTUM

OBSERVACION :

Algunos de los problemas resueltos pertenecientes a este capítulo se han extendido literalmente con la finalidad de explicar la teoría mediante ejemplos.

Relación entre **G** , **H$_o$** y **M$_o$** :

Siendo: **G** = Cantidad de movimiento.

H$_o$ = Momento cinético o angular.

M$_o$ = Momento o momentum.

$$\mathbf{G} = \Delta(m\mathbf{v}) = \Delta(m\dot{\mathbf{r}}) \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{G} = m\dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{G}} = m\ddot{\mathbf{r}} \end{cases} \text{-------------------- [I]}$$

$$\mathbf{H}_o = \mathbf{r} \times m\mathbf{V} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} \end{cases} \text{------------ [II]}$$

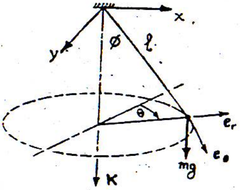
$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} \longrightarrow \mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} \text{ ------------ [III]}$$

Igualando: (II) con (III) se deduce : $\boxed{\mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{H}}_o}$

Igualando (I) con (III) se deduce : $\boxed{\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

405.—El péndulo cónico mostrado, formado por la cuerda de peso despreciable que contiene unido a su extremo la esferilla de masa m; gira al rededor del eje Z. Cuando Ø es constante la cuerda que suspende la esferilla describe una trayectoria cónica de donde deriva su nombre. Usando las ecuaciones del momento cinético demostrar que la velocidad angular $\dot{\theta}$ es constante y deducir la expresión de la posición Ø.



SOLUCION:

El vector posición **r** estará definido por:

$$\mathbf{r} = \ell \cdot \text{Sen.}\,\phi\, \mathbf{e}_r + \ell \cdot \text{Cos.}\,\phi\, \mathbf{K}$$

Considerando según el gráfico y el enunciado que:

$$\phi = \text{constante}$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\theta}\mathbf{K} \times \mathbf{K} = 0$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Derivamos $\mathbf{r}$:

$\dot{\mathbf{r}} = \ell \text{ Sen. } \phi \dot{\mathbf{e}}_r + \ell . \text{Cos. } \phi \dot{\mathbf{K}} = \ell \dot{\theta} . \text{Sen. } \phi \mathbf{e}_\theta$

El momento angular o cinético se define por: $\mathbf{H_0} = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}$

Por tanto: $\mathbf{H_0} = [\ell \text{ Sen. } \phi \mathbf{e}_r + \ell . \text{ Cos. } \phi \mathbf{K}] \times m \dot{\theta} \ell \text{ Sen. } \phi \mathbf{e}_\theta$

$$\mathbf{H_0} = - m \ell^2 \dot{\theta} \text{ Sen. } \phi \cdot \text{Cos. } \phi \mathbf{e}_r + m \dot{\theta} \ell^2 . \text{ Sen}^2 . \phi \mathbf{K}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo:

[A] $\dot{\mathbf{H}}_0 = - m \ddot{\theta} \ell^2 . \text{ Sen. } \phi . \text{ Cos. } \phi \mathbf{e}_r - m \dot{\theta}^2 \ell^2 \text{ Sen. } \phi \cdot \text{ Cos. } \phi \mathbf{e}_\theta +$

$m \ddot{\theta} \ell^2 \text{ Sen}^2 . \phi \mathbf{K}$

Además el momento respecto al punto O (fijo) será: (Ec.3 Teoría)

$$\mathbf{M_0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} = \mathbf{r} \times mg\mathbf{K} \quad , \quad \text{o sea:}$$

[B] $\mathbf{M_0} = (\ell . \text{ Sen. } \phi \mathbf{e}_r + \ell . \text{ Cos. } \phi \mathbf{K}) \times mg\mathbf{K} = - mg\ell . \text{ Sen. } \phi \mathbf{e}_\theta$

Considerando la igualdad: $\mathbf{M_0} = \dot{\mathbf{H}}_0$ (Ec. 4. Teoría) afirmamos según las ecuaciones A y B.

$- m \ell^2 \ddot{\theta} . \text{ Sen. } \phi . \text{ Cos. } \phi \mathbf{e}_r - m \dot{\theta}^2 \ell^2 . \text{ Sen. } \phi . \text{ Cos. } \phi \mathbf{e}_\theta +$

$m \ddot{\theta} \ell^2 \text{ Sen}^2 . \phi \mathbf{K} = - mg\ell . \text{ Sen. } \phi \mathbf{e}_\theta$

Comparando módulos de componentes iguales se deduce:

$m \ddot{\theta} \ell^2 . \text{ Sen. } \phi . \text{ Cos. } \phi = 0$ .... [1]

$m \dot{\theta}^2 \ell^2 . \text{ Sen. } \phi . \text{ Cos. } \phi = mg\ell . \text{ Sen. } \phi$ .... [2]

$m \ddot{\theta} \ell^2 . \text{ Sen}^2 . \phi = 0$ .... [3]

Por consideraciones del movimiento pendular ϕ varía entre los límites:

$$0° < \phi < 90° \longrightarrow \text{Sen. } \phi \text{ y Cos. } \phi \neq 0$$

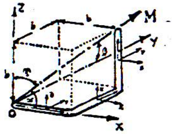
Según ello, de las ecuaciones 1 y 3 se deduce:

$\ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \dot{\theta} = \text{constante}$ Resp.

Reemplazando valores equivalentes en la ecuación 2 se obtiene:

$\text{Cos. } \phi = \dfrac{g}{\ell \dot{\theta}^2} \longrightarrow \phi = \text{Cos.}^{-1} \dfrac{g}{\ell \dot{\theta}^2}$ Resp.

406.—Determinar el momento de inercia respecto al eje diagonal OM, de la varilla de masa m doblada en ángulos rectos como se muestra.



SOLUCION:

El momento de inercia respecto a un eje diagonal en función de sus cosenos directores se define por la ecuación.

$$I_M = I_{xx}\ Cos.^2\alpha + I_{yy}\ Cos.^2\beta + I_{zz}\ Cos.^2\gamma -$$

$$2\left[I_{xy}\ Cos.\alpha \cdot Cos.\beta + I_{xz}\ Cos.\alpha \cdot Cos.\gamma + I_{yz}\ Cos.\beta \cdot Cos.\gamma\right]$$

Donde: I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} ⟶ Momentos de Inercia:
I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} ⟶ Productos de Inercia:
α , β , γ ⟶ ángulos directores

Del gráfico se deduce:

$$OM = b\mathbf{I} + b\mathbf{J} + b\mathbf{K}$$

Se observa que sus números directores son iguales, luego sus cosenos directores también lo son.

$$Cos.\alpha = Cos.\beta = Cos.\gamma = \frac{b}{b\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ .... (A)}$$

Aplicando el teorema de Steiner se deduce los momentos y productos de inercia de cada una de las partes.

Momentos de Inercia.

$$I_{xx} = \Sigma I'_{xx} = \Sigma I_{0x} + md_x^2 = 0 + \left(\frac{1}{3}mb^2\right) + \frac{1}{12}mb^2 + m\left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{3}mb^2$$

$$I_{yy} = \Sigma I'_{yy} = \Sigma I_{0y} + md_y^2 = \frac{1}{3}mb^2 + (mb^2) + \frac{1}{12}mb^2 + m\left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{8}{3}mb^2$$

$$I_{zz} = \Sigma I'_{zz} = \Sigma I_{0z} + md_z^2 = \frac{1}{3}mb^2 + \frac{1}{12}mb^2 + mb^2 + 0 + \frac{1}{4}mb^2$$

$$= \frac{5}{3}mb^2$$

Productos de Inercia.

$$I_{xy} = \Sigma I'_{xy} = \Sigma I_{o_{xy}} + md_x d_y = 0 + mb^2 + \frac{1}{2}mb^2 = \frac{3}{2}mb^2$$

$$I_{xz} = \Sigma I'_{xz} = \Sigma I_{o_{xz}} + md_x d_z = 0 + 0 + \frac{1}{2}mb^2 = \frac{1}{2}mb^2$$

$$I_{yz} = \Sigma I'_{yz} = \Sigma I_{o_{yz}} + md_y d_z = 0 + 0 + \frac{1}{2}mb^2 = \frac{1}{2}mb^2$$

Considerando A: La ecuación de I_M factorizada será:

$$I_M = \text{Cos.}^2\alpha \left[I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} - 2(I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}) \right]$$

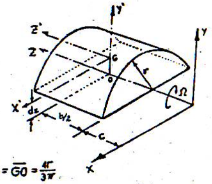
Reemplazando valores:

$$I_M = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left[\frac{5}{3}mb^2 + \frac{8}{3}mb^2 + \frac{5}{3}mb^2 - 2\left(\frac{3}{2}mb^2 + \frac{1}{2}mb^2 + \frac{1}{2}mb^2 \right) \right]$$

$$I_M = \frac{1}{3}mb^2(6 - 5) \longrightarrow I_M = \frac{1}{3}mb^2$$ Resp.

411.—Tal como se muestra, el semicilindro circular de masa m está rotando al rededor del eje z con velocidad angular Ω . Determinar el momento angular o cinético H respecto a los ejes mostrados.

SOLUCION:



$d_z = \overline{GO} = \frac{4r}{3\pi}$

El momento angular o cinético está relacionado con la velocidad angular mediante la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{Bmatrix}$$

Observando el gráfico se deduce:

$$\Omega = 0I + 0J + \Omega_z K$$

Donde: $\Omega_x = 0$; $\Omega_y = 0$; $\Omega_z = \Omega$ .... (A)

Considerando estos valores (A) las componentes de **H** según la matriz indicada quedarán expresadas por:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= 0 + 0 - I_{xz}\Omega \\ H_y &= 0 + 0 - I_{yz}\Omega \\ H_z &= 0 + 0 + I_{zz}\Omega \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(B)}$$

Aplicando el teorema de Steiner en la figura se obtiene: :

$$\begin{aligned} I_{xz} &= I_{G_{xz}} + md_x d_z = 0 \\ I_{yz} &= I_{G_{yz}} + md_z d_y = 0 + m\left(c + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) \\ I_{zz} &= \frac{1}{2} m r^2 \qquad \left[\text{Ver apéndice}\right] \end{aligned}$$

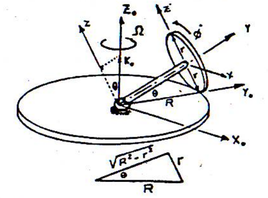
Reemplazando estos valores en (B) :

$$\begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= -\frac{2(2c + b)\, mr\Omega}{3\pi} \\ H_z &= \frac{1}{2} mr^2\Omega \end{aligned}$$

El vector $\mathbf{H} = H_x\mathbf{I} + H_y\mathbf{J} + H_z\mathbf{K}$ será :

$$\mathbf{H} = mr\Omega\left[\frac{-2(2c + b)}{3\pi}\mathbf{J} + \frac{r}{2}\mathbf{K}\right] \qquad \text{Resp.}$$

417.—El disco circular uniforme de masa m y radio r está montado sobre su eje que pivota en O, al rededor del eje vertical Z. Si el disco rueda sin deslizamiento sobre la base circular fija, realizando una revolución completa al rededor de ésta en un tiempo τ; determinar el momento angular o cinético del disco respecto a los ejes x, y, z mostrados.



SOLUCION:

La velocidad angular absoluta del disco será:

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\Omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(I)}$$

Considerando datos del problema y el diagrama se deduce:

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad ; \quad \text{Sen. }\theta = \frac{r}{R} \quad ; \quad \text{Cos. }\theta = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{K}_o = \Omega\left[\text{Sen. }\theta\mathbf{J} + \text{Cos. }\theta\mathbf{K}\right] = \frac{2\pi r}{\tau R}\mathbf{J} + \frac{2\pi\sqrt{R^2 - r^2}}{\tau R}\mathbf{K}$$

$$\dot{C} = -\frac{R}{r}\Omega J = -\frac{2\pi R}{\gamma r} J$$

Sustituyendo en la ecuación I los valores deducidos:

$$\Omega_{xyz} = \left[\frac{2\pi r}{\gamma R} - \frac{2\pi R}{\gamma r} \right] J + \frac{2\pi \sqrt{R^2 - r^2}}{\gamma R} K \quad \text{..................} \quad \text{(II)}$$

Según la matriz de transformación del problema 411 tenemos:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\Omega_x - I_{xy}\Omega_y - I_{xz}\Omega_z \\ H_y &= -I_{xy}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y - I_{yz}\Omega_z \\ H_z &= -I_{xz}\Omega_x - I_{yz}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Según II $\longrightarrow$ $\Omega_x = 0$

Los momentos y productos de inercia del disco son:

$$I_{yy} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4} m r^2 + m\left[R^2 - r^2\right]$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \qquad \{\text{Por simetría}\}$$

Reemplazando valores en el sistema (A):

$$H_x = 0$$

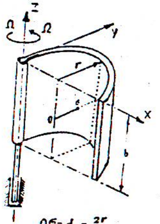
$$H_y = 0 + \frac{\pi r^2 m}{\gamma}\left[\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right] - 0$$

$$H_z = 0 - 0 + \frac{2\pi m r^2}{R\gamma}\left[\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{4} + \frac{(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2}}{r^2}\right]$$

Sumando y simplificando las componentes del vector H_o finalmente se obtiene:

$$H_o = \frac{2\pi m r^2}{\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right) J + \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\, K\right]$$

421.—La cáscara semi-cilíndrica de masa m, radio r y longitud b, está rotando al rededor del eje z fijo en su extremo como se muestra, con velocidad angular constante Ω. Calcular el momento angular o cinético de la cáscara respecto a los ejes x, y, z.



$O\sigma = d_y = \frac{2r}{\pi}$

SOLUCION:

La velocidad angular absoluta del cuerpo según se observa es:

$$\Omega_o = 0\,I + 0J + \Omega K$$

O sea:

$$\Omega_x = \Omega_y = 0 \quad ; \quad \Omega_z = \Omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [I]$$

Considerando la ecuación I y la matriz de transformación :

$\{H_{xyz}\} = [I]\{\Omega_{xyz}\}$ desarrollada en el problema 411 se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = [I]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} H_x = -I_{xz}.\Omega \\ H_y = -I_{yz}.\Omega \\ H_z = I_{zz}.\Omega \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Según la figura siendo G el centroide $\rightarrow OG = \frac{2r}{\pi}$, considerando el teorema de Steiner se deduce:

$$I_{zz} = I'_{zz} + md^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

$$I_{xz} = I'_{xz} + md_x d_z = mr\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{mrb}{2}$$

$$I_{yz} = I'_{yz} + m\,d_y d_z = m\left(\frac{2r}{\pi}\right)\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{mrb}{\pi}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación A :

$$H_x = \frac{mrb}{2}\,\Omega$$

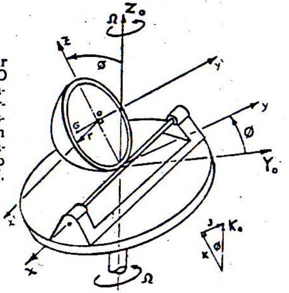
$$H_y = \frac{mrb}{\pi}\,\Omega$$

$$H_z = 2mr^2\,\Omega$$

Luego considerando : $H_o = H_x I + H_y J + H_z K$ se obtiene:

$$H_o = mr\Omega\left[\frac{b}{2}I + \frac{b}{\pi}J + 2rK\right] \quad . \quad \text{Resp.}$$

422.—La cáscara semi-esférica de radio r y masa m está soldada a un eje sobre O como se muestra. Si la base circular giratoria está rotando al rededor del eje vertical Z_o con velocidad angular Ω y la cáscara está rotando al rededor del eje x con velocidad angular $\dot{\phi}$, ambos simultáneamente; determinar el momento angular o cinético de la cáscara en función de Ø, respecto a los ejes x, y, z.



SOLUCION:

SOLUCION:

Según apéndice: $OG = d_y = r/2$

La velocidad angular del sistema es:

$$\Omega_{xyz} = \Omega + \dot{\phi} = \Omega(\text{Cos.}\phi K + \text{Sen.}\phi J) + \dot{\phi}\lambda$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\phi} \\ \Omega_y = \Omega\ \text{Sen.}\phi \\ \Omega_z = \Omega\ \text{Cos.}\phi \end{cases} \quad \text{..........(A)}$$

Según la matriz de transformación $\{H_{xyz}\} = [I]\{\Omega_{xyz}\}$ se afirma:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\Omega_x - I_{xy}\Omega_y - I_{xz}\Omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y - I_{yz}\Omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\Omega_x - I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z \end{aligned}\right\} \quad \text{..................(B)}$$

Del diagrama se deduce: {ver apéndice}

Momentos de inercia: $I_{zz} = 2mr^2/3$ .... [I]

$I_{xx} = I_{yy} = I_G + md^2 = 2mr^2/3 + mr^2 = 5mr^2/3$ .... [II]

Productos de inercia : $I_{xy} = I_{xz} = 0$ .... [III]

$I_{yz} = 0 + mr(-r/2) \longrightarrow I_{yz} = -mr^2/2$ .... [IV]

Sustituyendo las ecuaciones : A, I, II, III, y IV en B.

$$H_x = 5mr^2\dot{\phi}/3$$

$$H_y = (5/3)mr^2\Omega\ \text{Sen}\,\phi + (1/2)mr^2\Omega\ \text{Cos.}\phi$$

$$H_z = (1/2)mr^2\Omega\ \text{Sen}\,\phi + (2/3)mr^2\Omega\ \text{Cos.}\phi$$

Considerando que $H_o = H_x\lambda + H_yJ + H_zK$ se obtiene:

$$H_o = mr^2\left[\frac{5\dot{\phi}}{3}\lambda + \Omega\left(\frac{5}{3}\text{Sen.}\phi + \frac{1}{2}\text{Cos.}\phi\right)J + \Omega\left(\frac{1}{2}\text{Sen}\,\phi + \frac{2}{3}\text{Cos.}\phi\right)K\right]$$

Resp.

MOVIMIENTO OSCILATORIO O VIBRATORIO

Conceptos Básicos.

Movimiento Armónico: Es una forma simple del movimiento periódico. Se representa mediante las funciones Seno o Coseno.

Observación: Todo movimiento armónico es periódico, pero no todo movimiento periódico es armónico.

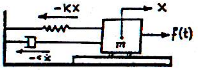
Relaciones entre: ω = Velocidad angular constante.
f = Frecuencia angular.
τ = Periodo de oscilación.

Un ciclo completo se cumple en un periodo τ Por tanto:

2π rad. $= \omega\tau$ rad. $\longrightarrow$ $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f$ rad./Seg.

Donde: $\tau = 1/f$ Seg. $\longrightarrow$ $f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$ Ciclos Seg.

Ecuación general del movimiento Vibratorio para una particula con un grado de libertad.



$$m\ddot{X} = F_a + F_r + F(t)$$

Donde:

F_a = Fuerza de amortiguamiento $= -c\dot{x} = -cV$
F_r = Fuerza de resorte $= -Kx$
F_t = Fuerza externa aplicada $=$ $F_o \text{Sen.}\,\omega t$
c = Coeficiente de amortiguamiento viscoso.
K = Constante recuradora del resorte.

Para estas, condiciones en las cuales el resorte es **lineal,** el amortguamiento es **viscoso** y la fuerza es función **armónica;** la ecuación general en referencia quedará expresada por:

$$m\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_0 .\text{Sen.}\,\omega t$$

$$\ddot{X} + \left[\frac{C}{m}\right]\dot{X} + \left[\frac{K}{m}\right]X = \left[\frac{F_0}{m}\right] \text{Sen.}\,\omega t$$

$$\boxed{\ddot{X} + 2n\dot{X} + P^2X = F.\text{Sen.}\,\omega t}$$ **Ecuación general**

Donde: $\left[\frac{C}{m} = 2n\right]; \left[\frac{K}{m} = P^2\right]; \left[\frac{F_0}{m} = F\right]$

En la aplicación de esta ecuación se presentan los siguientes casos:

Primer caso : Oscilaciones Libres no amortiguadas.
Segundo caso: Oscilaciones Libres amortiguadas:
Tercer caso : Oscilaciones Forzadas no amortiguadas.
Cuarto caso : Oscilaciones Forzadas amortiguadas.

OBSERVACION: Para el primer caso la fuerza de amortiguamiento y la fuerza externa son nulas, reduciendose la ecuación general a la ecuación diferencial : $\ddot{X} + P^2X = 0$

O por analogía : $\ddot{\theta} + P^2\theta = 0$

Puesto que: $\ddot{X} = \ddot{\theta} r \quad , \quad X = r\theta$

Y donde: $P = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad P = \omega$

466.—Usando los conceptos de trabajo y energía, deducir la ecuación de la pulsación p para un movimiento armónico.

SOLUCION:

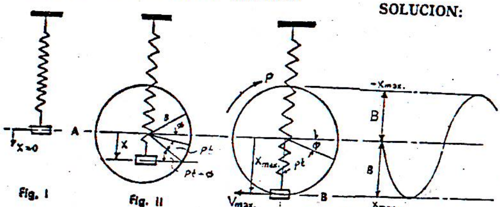


Fig. I Fig. II Fig. III

De la figura (II) se deduce:

$X = B. \text{Sen.} (pt + \phi)$. Donde: $P =$ pulsación

$\phi =$ ángulo de fase

Puesto que el movimiento es armónico , para oscilaciones pequeñas ϕ es despreciable. Por tanto:

$X = B. \text{Sen. } pt$

Para el punto inicial A se cumple: (Fig. I)

$$[I] \cdots \begin{cases} X = 0 \\ \dot{X} = Bp. \text{ Cos. } pt = Bp. \text{ Cos.} 0 = Bp. = V_A \end{cases}$$

Para el punto B (elongación máxima) se cumple: (Fig. III)

$$[II] \cdots \begin{cases} X = X \text{ max.} = X_{B} = B \\ \dot{X} = B. p. \text{ Cos. } pt. = Bp. \text{ Cos. } 90° = 0 = V_B \end{cases}$$

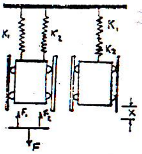
Puesto que no actuan fuerzas externas el sistema es conservativo ; en consecuencia : $\Delta T + \Delta V = 0$

$$\frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) + \frac{1}{2} K (X_B^2 - X_A^2) = 0$$

Sustituyendo los valores deducidos en (I) y (II) se obtiene:

$$\frac{1}{2} m (0 - B^2 P^2) + \frac{1}{2} K (B^2 - 0) = 0 \longrightarrow P = \sqrt{K/m.}$$

467.—Determinar para cada caso mostrado (Resortes en serie y paralelo), un resorte equivalente de constante recuperadora K, que permita oscilar a cada peso con la frecuencia original.



SOLUCION:

Para los resortes en paralelo: {Ver diagrama}

Sea $X =$ unidad de desplazamiento. .... [A]

$K =$ Constante equivalente.

Puesto que los resortes son paralelos la elongación X es común para ambos y la fuerza ejercida por cada resorte es:

$$F_1 = K_1 X \quad ; \quad F_2 = K_2 X \quad \text{-------------} \quad [I]$$

Pero según se observa en el diagrama de cuerpo libre:

$$F = F_1 + F_2$$

y según la ecuación (I): $F = K_1 X + K_2 X = X(K_1 + K_2)$ [II]

Se sabe además que la constante K es la fuerza que ejerce un resorte por unidad de desplazamiento. En consecuencia según (A) y (II):

$$K = \frac{F}{X} = \frac{X(K_1 + K_2)}{X} \longrightarrow \boxed{K = K_1 + K_2} \quad \text{L.q.q.d.}$$

Para los resortes en serie : {Ver diagrama}

Sea $X =$ Elongación total de ambos resortes cuando actúa sobre ellos una fuerza F, que suponemos se distribuye uniformemente en los resortes durante una unidad de desplazamiento. [I]

Por tanto: $X = X_1 + X_2$. Siendo X_1 y X_2 elongaciones de cada resorte

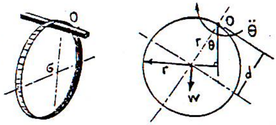
y donde según la afirmación (I):
$$\begin{cases} X = F/K \\ X_1 = F/K_1 \\ X_2 = F/K_2 \end{cases} \qquad [II]$$

Sustituyendo II en la ecuación anterior y eliminando el término común:

$$\frac{F}{K} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \longrightarrow \boxed{K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}} \quad \text{L.q.q.d.}$$

468.—El anillo circular uniforme de radio r oscila con pequeña amplitud suspendido del filo horizontal. Hallar el periodo de oscilación.



SOLUCION

Aplicando la ecuación de momentos respecto al eje fijo de rotación que pasa por O . (Ver diagrama de cuerpo libre)

$$[\Sigma M_O = I_O \alpha] \longrightarrow -mg(r.\text{Sen. }\theta) = I_O\ddot{\theta} \text{ ----------------- [I]}$$

Donde: I_o = Momento de inercia respecto a O . (Ver Apéndice)

Por Steiner: $I_O = I_G + md_1^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$ .... [A]

Además : Sen. $\theta \approx \theta$ {Se trata de pequeñas amplitudes} [B]

Sustituyendo A y B en la ecuación I se obtiene:

$$-mgr\theta = 2m\ddot{\theta}r^2 \longrightarrow \ddot{\theta} + [g/2r]\theta = 0 \text{ ---------- [II]}$$

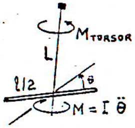
La ecuación diferencial (II) pertenece al movimiento oscilatorio libre no amortiguado cuya forma es: $\ddot{\theta} + p^2\theta = 0$ ------------------------------- [C]

Por tanto, según se observa en C y II: $p^2 = [g/2r]$ .... [D]

Se afirma que para este tipo de movimiento la pulsación P es igual en magnitud a la velocidad angular ω . Por tanto, según D la ecuación del periodo de oscilación será:

$$\gamma = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{g}{2r}} \longrightarrow \gamma = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \quad [E]$$

469.—Una barra uniforme de longitud l y masa m, pende por su punto medio a un alambre de longitud l, de momento de inercia polar J y módulo de elasticidad G. Considerando que el momento resistente a la torsión del alambre es proporcional al ángulo de torsión θ, determinar el periodo de oscilación de la barra cuando ésta rota en torno al eje del alambre.



SOLUCION:

Por condición del problema y resistencia de materiales, el momento torsor del alambre respecto al eje vertical Z es:

$$M = \left[\frac{JG}{L}\right]\theta \text{ -------------- [I]}$$

Pero M es a la vez el momento resultante que actúa sobre la barra horizontal respecto a su centro O, en sentido opuesto al del torsor como se ilustra. Por tanto:

$[\Sigma M_0 = I_0 \alpha] \longrightarrow -M = I_0 \ddot{\theta} = [m\ell^2/12]\,\ddot{\theta} \longrightarrow M = -m\ell^2\ddot{\theta}/12$ [II]

Comparando I y II se obtiene:

$JG\theta/L = -m\ell^2\ddot{\theta}/12 \longrightarrow \ddot{\theta} + [12\,JG/mL\ell^2]\,\theta = 0$ ------- [A]

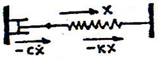
La ecuación diferencial (A) corresponde a oscilaciones libres no amortiguadas cuya forma es: $\ddot{\theta} + P^2\theta = 0$

Por tanto según se observa en (A): $P^2 = [12\,JG/mL\ell^2]$ ---------- [B]

Además para este tipo de movimiento la velocidad angular ω es igual a la pulsación P y la ecuación del periodo de oscilación es según (B):

$$\gamma = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{12JG}{mL\ell^2}} \longrightarrow \gamma = \pi\ell\sqrt{\frac{mL}{3JG}}$$ Resp.

482.—El resorte mostrado de constante K está unido directamente al amortiguador viscoso como se indica. Si se suelta del reposo con un desplazamiento Xo medido desde la posición de fuerza cero, y despreciando la masa del sistema; hallar la ecuación del desplazamiento X en función del tiempo t empleado desde que se suelta.



SOLUCION:

Por condiciones del problema : $[X = X_0] \longrightarrow [t = 0]$ --------- [A]

Puesto que la masa del sistema es despreciable la ecuación del movimiento del sistema será:

[I] $C\dot{X} + KX = 0$ Siendo: { C = Coeficiente de amortiguamiento viscoso. K = Constante del resorte.

Desarrollo de la ecuación diferencial [I]

Sea: $X = Ae^{rt}$ -- [B]

Derivando: $\dot{X} = Are^{rt}$ -- [C]

Sustituyendo B y C en I se obtiene:

$$CAre^{rt} + KAe^{rt} = 0$$

$$Cr + K = 0 \longrightarrow r = -K/C$$ ---------- [D]

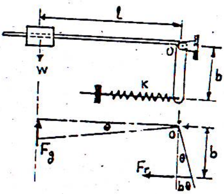
Además considerando las condiciones iniciales (A), la ecuación (B) se transforma en:

$$X_0 = Ae^0 = A(1) \longrightarrow A = X_0$$ -------------- [E]

Sustituyendo D y E en B se obtiene el desplazamiento buscado:

$$X = X_0 e^{(-K/C)t} \longrightarrow \boxed{X = X_0 e^{-Kt/C}}$$ Resp.

736.—Calcular la expresión de la frecuencia natural f de las pequeñas oscilaciones en torno a O, de la barra en L que contiene el peso W como se muestra. La constante recuperadora del resorte es k y la longitud ℓ es tal que permite que el brazo esté en equilibrio en la posición horizontal. La masa del resorte y de la barra es despreciable comparada con el peso W.



SOLUCION:

Según se observa en el diagrama de cuerpo libre, para un pequeño desplazamiento angular θ:

La fuerza ejercida por el resorte será:

$$F_r = -kx = -k.b\theta \quad [x = \text{diferencial de arco}]$$

La fuerza inercial producida por el peso W será:

$$F_g = -m.a_t = -(w/g)(\ell\ddot{\theta}) = -w\ell\ddot{\theta}/g$$

Aplicando el principio de D'Alambert, considerando que F_r y F_g son fuerzas inerciales tomamos momentos respecto a O: [Ver diagrama]

$$\Sigma M_o = 0 \longrightarrow (w\ell\ddot{\theta}/g)\,\ell + (k.b\theta)\,b = 0$$

Luego:

$$\ddot{\theta} + (gkb^2/w\ell^2)\,\theta = 0 \quad \text{-------------} \quad [A]$$

(A) es una ecuación diferencial lineal de la forma:

$\ddot{\theta} + P^2\theta = 0$ (Oscilaciones libres no amortiguadas).

Por lo tanto según (A)

$$P^2 = (gkb^2/w\ell^2) \longrightarrow P = \frac{b}{\ell}\sqrt{gk/w} \quad [B]$$

Donde P es la pulsación, en consecuencia la frecuencia natural será:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi/p} = \frac{P}{2\pi}$$

Sustituyendo (B)

$$f = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{b}{\ell}\sqrt{gk/w}$$

Resp.

Flujo Estacionario

Cuando la cantidad de masa que entra en un determinado volumen en la unidad de tiempo, es la misma que sale de dicho volumen en a unidad de tiempo.

$$(\Delta m)\, V_1 + \Sigma F.\, \Delta t = (\Delta m)\, V_2$$

MASA VARIABLE

Siendo ·

$\Sigma \mathbf{F}$ = Fuerza resultante de todas las demás fuerzas que actúan sobre la masa en dirección de su movimiento.

m = masa del cuerpo en cualquier instante.

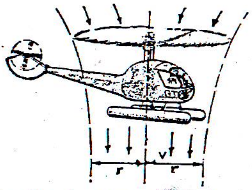
m' = Variación de la pérdida o ganancia de masa.

$\mathbf{V}$ = Velocidad del cuerpo en cualquier instante:

$\mathbf{U}$ = Velocidad relativa.

Se afirma: $\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{V}} - \dot{m}\mathbf{U} \longrightarrow \Sigma \mathbf{F} + \dfrac{dm}{dt}\mathbf{U} = m\dfrac{d\mathbf{V}}{dt}$

520.—El helicóptero mostrado de peso W se mantiene suspendido en el aire debido al flujo de aire que comunica hacia abajo su rotor. Despreciando la energía por efecto de rotación del aire, elevación de temperatura, etc. Determinar la velocidad del aire dada por el rotor hacia abajo y la potencia que debe desarrollar el motor, si el radio del chorro es r.



SOLUCION:

La masa de flujo de aire que entra es igual a la masa de flujo de aire que sale:

Por tanto: $m_1 = m_2$

donde $\begin{cases} m_1 = \text{masa de partículas de aire que entran.} \\ m_2 = \text{masa de partículas de aire que salen} \end{cases}$

El impulso en un dt estará definido por la ecuación:

$$\Sigma\, F.dt = dm\,(V_2 - V_1)$$

$$\Sigma\, F = \frac{dm}{dt}\,(V_2 - V_1) \longrightarrow \Sigma F = m'\,(V_2 - V_1) \quad [A]$$

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{lll} V_1 = 0 & = & \text{Velocidad de entrada = Velocidad del helicóptero} \\ V_2 = V & = & \text{Velocidad de salida del flujo} \\ A_2 = \pi r^2 & = & \text{Sección del flujo de salida} \\ \text{Ademas: } m' & = & \text{masa que circula en unidad de tiempo.} \end{array}\right\} \quad [B]$$

Segun (B):. $m' = \left[\rho A_2 V_2 - \rho A_1 V_1 \right] = \rho(\pi r^2)\, V - 0 = \rho \pi r^2 V$ [C]

Aplicando la ecuación del movimiento en el eje vertical, siendo:

$W =$ Peso del helicóptero

$\bar{S} =$ Fuerza ejercida por el motor

$E =$ Empuje.

$$\Sigma F = W + S - E$$

Pero: puesto que el aparato está suspendido : $S = E$

$$\Sigma F = W + S - S \longrightarrow \Sigma F = W \text{ .... [D]}$$

Sustituyendo (B), (C), (D) en (A):

$$W = \rho \pi r^2 V (V - 0) \longrightarrow \boxed{V = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{W}{\pi \rho}}}$$

De la ecuación de la aceleración se deduce :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v.dv}{dx} \longrightarrow a = \frac{v.dv}{dx}$$

Según la ecuación de la fuerza, e integrando:

$$F = m.a = m.\ v.\frac{dv}{dx} \longrightarrow F\int_0^x dx = m.\int_{V_1}^{V_2} v.\, dv$$

$$F x = m \left[\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right]$$

$$\longrightarrow F = \frac{m.v^2}{2x}$$

De la ecuación de la potencia:

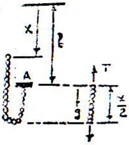
$$P = \frac{T}{t} = \frac{F.\, x}{t} = \frac{mv^2 .\, x}{2t\, x} = \frac{m\, v^2}{2t}$$

$$= m \left(\frac{V}{2}\right)\left(\frac{V}{t}\right) = m.a. \left(\frac{V}{2}\right) = \frac{F\, V}{2}$$

Sustituyendo la ecuacion (D) y la velocidad se obtiene:

$$P = \frac{W}{2} \left[\frac{1}{r} \sqrt{\frac{W}{\pi \rho}} \right] \longrightarrow \boxed{P = \frac{W}{2r}\sqrt{\frac{W}{\pi \rho}}}$$

529.—La cadena mostrada de longitud l y peso μ por unidad de longitud está fija en su extremo A. Su otro extremo se suelta a partir del reposo cuando $X = 0$. Determinar la tensión T que ejerce la cadena en el soporte A, en función de X.



SOLUCION:

El diagrama de cuerpo Libre (b) representa la porción de cadena de la derecha considerada como si estuviera ganando masa. Por tanto el peso total de dicha porción será:

$$mg = w = \mu(x/2) \qquad [\mu = \text{peso por unidad de longitud.}] \qquad [I]$$

La ecuación del movimiento en X deberá cumplir la condición:

$$\Sigma Fx = m\dot{v} + \dot{m}U = m\dot{v} + \frac{dm}{dt}U = m\dot{v} + m\frac{dU}{dt} = m\ (\dot{v} + \dot{U}) \ [A]$$

donde U es velocidad relativa cuyo valor es:

$$U = v_2 - v_1 = v - 0 = v \qquad [\text{Puesto que gana masa a partir del reposo}]$$

Derivando:

$$\dot{U} = \dot{V} = g \qquad [\text{aceleración de la gravedad.}] \ \text{.......................} \ [II]$$

Sustituyendo I y (II) en la ecuación (A) se obtiene:

$$\Sigma F_x = \frac{w}{g}\ (g + g) = 2w = 2\left(\mu\frac{x}{2}\right) = \mu x \ \text{.................} \ [B]$$

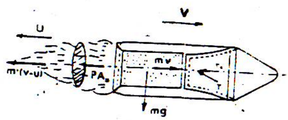
Pero según del diagrama:

$$\Sigma F_x = T - W = T - \mu\frac{x}{2} \ \text{.................................} \ [C]$$

Igualando las ecuaciones B y C se deduce:

$$T - \mu\frac{x}{2} = \mu x \quad \longrightarrow \quad T = \frac{3\mu x}{2} \quad \text{Resp.}$$

534.—El cohete de combustible sólido que se muestra, describe una trayectoria recta horizontal (Respecto a la Tierra) en el instante representado. La presión media en el área media A_o del chorro es P, y la velocidad relativa al cohete con que salen los gases es U. Las fuerzas aerodinámicas producto de las resistencias por fricción, gravitación y otras presiones particulares a P se representan por las fuerzas R y T supuestas constantes. Considerando que el cohete parte del reposo determinar su velocidad en función del tiempo.



SOLUCION :

Para mayor claridad del problema se indica en el gráfico las diferentes fuerzas actuantes. Aplicando la ecuacion de cantidad de movimiento en el eje X se obtiene: [Ver diagrama]

$$\Sigma F.\ dt = dm.(\Delta V_x) \longrightarrow \Sigma F = m'\ (\Delta V_x)$$

$$PA_o + R + T_x = m\dot{v} + m'v - m'(V - U) \text{ .... [A]}$$

Siendo $(V - U)$ la velocidad relativa del gasto de combustible.

Además $\quad m' = -\rho.UA_o$ [puesto que la masa está disminuyendo]

Sustituyendo este valor en (A) y simplificando se obtiene:

$$PA_o + R + T_x + \rho.UA_o\,(V - V + U) = m\dot{V}$$

$$\dot{V} = (\rho.U^2A_o + PA_o + R + T_x)/m \text{ .... [B]}$$

Pero: $\left\{\begin{array}{l} \dot{V} = dv/dt \text{ .... [C]} \\ m' = -\rho.UA_o \end{array}\right.$

Por tanto: $\displaystyle\int_{m_o}^{m} dm = -\rho.UA_o \int_0^t dt$

$$(m - m_o) = -\rho.UA_o\,(t - 0) \longrightarrow m = m_o - \rho.UA_o t \quad [D]$$

Reemplazando (C) y (D) en (B) e integrando considerando que el artefacto parte del reposo:

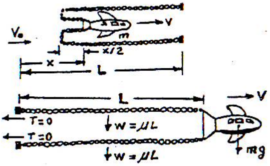
$$\int_0^v dv = (\rho.U^2A_o + PA_o + R + T_x)\int_0^t \frac{dt}{m_o - \rho UA_o t}$$

$$(V - 0) = (\rho.U^2A_o + PA_o + R + T_x)\,(-1/\rho.UA_o)\,L_n\left[m_o - \rho.UA_o t\right]$$

Por último cambiando el signo al logaritmo y simplificando se obtiene:

$$V = \left[U + (PA_o + R + T_x)/\rho.U\right] L_n\left[1/(m_o - \rho.UA_o t)\right] \text{ Resp.}$$

535.—El avión de masa m mostrado se desplaza libremente con velocidad Vo enganchándose en un dispositivo que tira de los extremos de dos cadenas pesadas de longitud L c/u. y masa μ por unidad de longitud. Despreciando el frenado por rozamiento de la cadena sobre el suelo y otras resistencias al movimiento, determinar la velocidad del avión en el instante en que se pone en movimiento el último eslabón de la cadena. Hallar también la expresión de X en función del tiempo t medido desde que se pone en contacto con la cadena.



SOLUCION:

Un instante antes que el último eslabón se mueva hacia la derecha la fuerza de tensión T es cero , en consecuencia el sistema es conservativo puesto que no hay fuerzas externas. Por lo tanto se cumplirá:

$$\Sigma F_x = m\dot{v} + \dot{m}_1 U = 0$$

O tambien: $m\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{dm_1 U}{dt} = 0 \longrightarrow m.dv + m_1 dU = 0$ [A]

Donde: m = masa en movimiento del avión.

m_1 = masa en movimiento de la cadena: $= \mu L + \mu L = 2\mu L$.

v = Velocidad del avión [Varía de : V_o a V]

U = Velocidad de la cadena relativa al avión.

Separando variables e integrando la ecuación (A) , considerando que los eslabones parten del reposo y alcanzan la velocidad del avión:

$$m\int_{V_o}^{V} dv = -m_1\int_{U_o=0}^{U=V} dU$$

$$m(v - v_o) = -m_1(v - 0) \longrightarrow v = mv_o / (m + m_1) \quad [B]$$

Sustituyendo el valor de m_1 se obtiene: $v = \dfrac{v_o}{1+(2\mu L/m)}$

Cálculo de x :

Para un recorrido X la ecuación (B) tendrá los siguientes valores:

$$L = x \longrightarrow m_1 = \mu x$$

$$V = dx/dt \qquad m = m$$

Por lo tanto según (B): $V(m_1 + m) = mV_o$

$$dx(\mu x + m) = mV_o.\,dt$$

Integrando: $$\int_0^x (\mu x + m)\,dx = mV_o\int_0^t dt$$

$$\frac{\mu x^2}{2} + mx = mV_o(t-0) \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{mx}{\mu} - \frac{mv_o t}{\mu} = 0$$

Se ha llegado a una ecuación simple de segundo grado cuya solución es:

$$X = \frac{-m/\mu + \sqrt{(m/\mu)^2 - 4(1/2)(-m.v_o.t/\mu)}}{2(1/2)}$$

Factorizando se obtiene:

Resp. $$X = \frac{m}{\mu}\left[\sqrt{1 + \frac{2\mu v_o t}{m}} - 1\right]$$

ECUACIONES DE LAGRANGE'S

Sean (q_1, q_2, q_3) coordenadas generalizadas independientes que pueden ser por ejemplo: (x, y, z) ; $(r, \theta, \varnothing)$, etc.

Sean las ecuaciones del movimiento de una partícula:

$$F_x = m\ddot{x} \quad ; F_y = m\ddot{y} \quad , \quad F_z = m\ddot{z}$$

Multiplicando la primera ecuación por el **desplazamiento virtual** δx, la segunda por δy, y la tercera por δz y sumando ambos miembros se obtiene :

$$F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z = m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y + m\ddot{z}\,\delta z \text{ ---------- [I]}$$

Suponiendo: $\delta q_2 = \delta q_3 = 0 \longrightarrow q_1 \neq 0$, por derivadas parciales se afirma:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3$$

$$\Longrightarrow \quad \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1; \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1; \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 \text{ ------[II]}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (I) se obtiene:

$$\left(F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1 = \left(m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + m\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1$$

El primer miembro indica el trabajo efectuado por las fuerzas externas del sistema en un desplazamiento δq_1, siendo el parentesis la expresión de la **fuerza generalizada** Q_1, la cual se calcula dividiendo por δq_1 el trabajo total efectuado por las fuerzas externas en un desplazamiento δq_1 de una de las coordenadas.

O sea :

$$Q_1 = F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1}$$

Segúr lc fórmula para diferenciación de un producto se afirma:

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) - \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) \qquad [A]$$

Similarmente a (II) se deduce:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 \qquad [B]$$

Además:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1};\ \text{etc.} \qquad [C]$$

Sustituyendo las ecuaciones (B) y (C) en (A):

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \qquad [D]$$

Pero la energía cinética de la partícula es:

$$T = \frac{1}{2}m\ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Por lo tanto, la ecuación (D), simplificando δq_1 se reduce a:

$$Q_1\delta q_1 = m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right\}\delta q_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

Que es la ecuación de Lagrange's en función de la energía **cinética.**

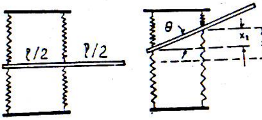
NOTA: Similarmente se deduce las ecuaciones en función de q_1, q_2. Habrá tantas ecuaciones de Lagrange's, como **grados de libertad** tenga el sistema. Si el sistema es **conservativo,** tal que las fuerzas que actúan puedan derivarse de una energía potencial V por definición se afirma: $Q_n = -\ (\partial V / \partial q_n)$

Y la ecuación de Lagrange's toma la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

Que es la ecuación en función de la energía **Potencial,** donde $L = (T - V)$ [Función Langragiana o Potencial cinético del sistema.]

549.—La barra uniforme de masa m y longitud l, adherida a los resortes iguales de constante recuperadora K/2 cada uno; oscila en el plano horizontal como se indica. Deducir las ecuaciones diferenciales de su movimiento para pequeñas oscilaciones angulares y lineales en la dirección transversa a la barra.



SOLUCION:

Puesto que el sistema es conservativo es factible aplicar la ecuación de Lagrange's en función de: $L = T - V$

La ecuación de la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad , \quad \text{donde } I_G = \frac{1}{12}m\ell^2 \ \left\{ \text{Ver apéndice} \right\}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\theta}^2 \quad \text{...} \quad [I]$$

La ecuación de la energía potencial del sistema según el gráfico es:

$$V = \frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}K(X - X_1)^2 \quad , \text{Donde: } K = \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K \text{ ------} \quad (II)$$

$$X_1 = \frac{\ell}{2}\theta \text{ ....} [III]$$

Por tanto; sustituyendo las ecuaciones I , II y III se obtiene:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \frac{1}{12}\ell^2\dot{\theta}^2\right) - \left(KX^2 - \frac{1}{2}K\ell X\theta + \frac{1}{8}K\ell^2\theta^2\right)[IV]$$

El sistema tiene 2 grados de libertad (θ, x). Luego :

para la componente θ se obtiene: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ------ (A)

y para la componente x: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$ ------- (B)

Según [IV]: $\frac{\partial L}{\partial X} = -2KX + \frac{1}{2}K\ell\theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{X}) = m\ddot{X}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2}KX\ell - \frac{1}{4}K\theta\ell^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{12}m\ell^2\ddot{\theta}$$

Sustituyendo en (A) y (B) los valores deducidos se obtiene:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 2KX - K\dfrac{\ell\theta}{2} = 0 \\ m\ddot{\theta} - 6K\left(\dfrac{X}{\ell} - \dfrac{\theta}{2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \text{Resp.}$$

756.—La esferilla perforada de masa m se desplaza a lo largo de la trayectoria de la espiral cónica mostrada, regida por las ecuaciones: $\rho = aZ$; y $\varnothing = -bZ$, donde a y b son constantes. Usando las ecuaciones de Lagrange's determinar la ecuación de su movimiento.

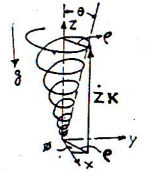
SOLUCION:

La posición de la esferilla está definida por el vector:

$$\mathbf{r} = \rho \,\text{Cos.}\phi \,\mathbf{i} + \rho \,\text{Sen.}\phi \,\mathbf{J} + Z\mathbf{K} \quad , \text{ donde: } \rho = aZ, \quad \phi = -bZ$$

Luego:

$$\mathbf{r} = aZ\text{Cos.}(-bZ)\,\mathbf{i} + aZ\,\text{Sen.}(-bZ)\mathbf{J} + Z\mathbf{K}$$



Derivando ambos miembros y extrayendo módulos:

$$\dot{\mathbf{r}} = [a\dot{Z}\text{Cos.}(-bZ) + aZb\dot{Z}\,\text{Sen.}(-bZ)]\,\mathbf{i} + [a\dot{Z}\,\text{Sen.}(-bZ) - aZb\dot{Z}\,\text{Cos.}(-bZ)]\,\mathbf{J} + \dot{Z}\mathbf{K}$$

$$\dot{r}^2 = [a\dot{Z}\text{Cos.}(-bZ) + aZb\dot{Z}\,\text{Sen.}(-bZ)]^2 + [a\dot{Z}\,\text{Sen.}(-bZ) - aZb\dot{Z}\,\text{Cos.}(-bZ)]^2 + \dot{Z}^2$$

Donde: $\dot{r}^2 = a^2\dot{Z}^2 + a^2b^2Z^2\dot{Z}^2 + \dot{Z}^2 = \dot{Z}^2(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2)$ [I]

Aplicando la ecuación de Lagrange's:

[A] $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial Z} = F_z$ donde: $T = \dfrac{1}{2}mV^2 = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$ [Energía cinética]

Según la ecuación I: $\longrightarrow \quad T = \dfrac{1}{2}m\dot{Z}^2(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2)$

[B] $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{Z}(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2) \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) =$

$$m\ddot{Z}(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2) + 2ma^2b^2Z\dot{Z}^2$$

[C] $\dfrac{\partial T}{\partial Z} = ma^2b^2Z\dot{Z}^2$

El método de Lagrange's desprecia la fuerza de contacto entre la esferilla y la espiral. En consecuencia el único trabajo que actúa en la dirección Z es el producido por la fuerza gravitatoria (− mg):

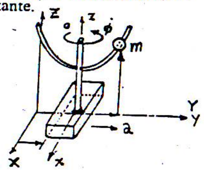
[D] $\delta W = F_z.\delta Z = -mg.\delta Z \longrightarrow F_z = -mg$

Sustituyendo las ecuaciones B, C y D en A se obtiene: la ecuación del movimiento de la esferilla.

$$m\ddot{Z}(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2) + 2ma^2b^2Z\dot{Z}^2 - ma^2b^2Z\dot{Z}^2 = -mg$$

$$\ddot{Z}(a^2 + 1 + a^2b^2Z^2) + ma^2b^2Z\dot{Z}^2 = -g \qquad \text{Resp.}$$

757.—La semiparábola rígida mostrada definida por la ecuación $Z = br^2$, rota al rededor del eje Z que pertenece al sistema de coordenadas que se desplazan con la plataforma en la dirección del eje (y) respecto al sistema fijo X, Y, Z con aceleración constante a. La esferilla de masa m resbala libremente como se muestra por acción de la fuerza gravitatoria. Determinar la ecuación de su movimiento en la dirección radial r, asumiendo $\dot{\phi}$ = constante.



Similarmente al problema anterior se deduce:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{r} + \mathbf{Z} \quad [\text{Posición absoluta de } m]$$

$$\mathbf{R} = SJ + r(\text{Cos.}\phi\lambda + \text{Sen.}\phi J) + br^2K \qquad (\text{Ver gráfico})$$

Derivando respecto al tiempo y ordenando términos:

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot S + \dot r\,\text{Sen.}\phi + r\phi\,\text{Cos.}\phi)J + (\dot r\,\text{Cos.}\phi - r\dot\phi\,\text{Sen.}\phi)\lambda + 2br\dot r K$$

Transformando a escalar:

$$R^2 = (\dot S + \dot r\,\text{Sen.}\phi + r\dot\phi\,\text{Cos.}\phi)^2 + (\dot r\,\text{Cos.}\phi - r\dot\phi\,\text{Sen.}\phi)^2 + 4b^2r^2\dot r^2$$

$$R^2 = \dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + \dot S^2 + 2\dot r\dot S\,\text{Sen.}\phi + 2r\dot S\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r^2\dot r^2 \text{.......} \quad [I]$$

Sustituyendo [I] en la ecuación de la energía cinética considerando además que : $\dot S = at$

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + a^2t^2 + 2at\dot r\,\text{Sen.}\phi + 2atr\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r^2\dot r^2\right]$$

Luego: $$\frac{\partial T}{\partial r} = m\left[r\dot\phi^2 + at\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r\dot r^2\right] \text{..........................} \quad [A]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\left[\dot r + at\,\text{Sen.}\phi + 4b^2r^2\dot r\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) = m\left[\ddot r + a\,\text{Sen.}\phi + at\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r^2\ddot r + 8b^2r\dot r^2\right] \qquad [B]$$

El trabajo producto de la fuerza gravitatoria será:

$$\delta W = -mg.\delta Z \ , \quad \text{Pero } Z = br^2 \longrightarrow \delta Z = 2br.\delta r$$

$$\delta W = -2mgbr.\delta r = F_r.\delta_r \longrightarrow F_r = -2mgbr \qquad [C]$$

Sustituyendo las ecuaciones A, B y C en la ecuación de Lagrange's:

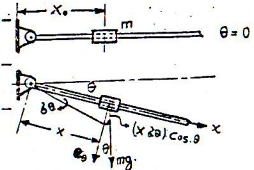
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = F_r$$

se obtiene la ecuación del movimiento solicitada. O sea:

$$m\left[\ddot r + a\,\text{Sen.}\phi + at\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r^2\ddot r + 8b^2r\dot r^2\right] - m\left[r\dot\phi^2 + at\dot\phi\,\text{Cos.}\phi + 4b^2r\dot r^2\right] = -2mgbr$$

$$\ddot r(1 + 4b^2r^2) + r(4b^2\dot r^2 - \dot\phi^2) + a\,\text{Sen.}\phi = -2rbg \qquad \text{Resp.}$$

758.—El collar de masa m resbala libremente a lo largo de la varilla que está girando en torno a un eje horizontal que pasa por O. El momento de inercia de la varilla respecto al eje O es I. Si el collar y la varila parten simultáneamente del reposo cuando $\theta = 0$, y $X = X_o$, determinar las ecuaciones diferenciales que expresen su movimiento.



SOLUCION:

El módulo de la velocidad del anillo en coordenadas polares es:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \dot{X}^2 + X^2\dot{\theta}^2$$

La energía cinética del sistema está definida por la ecuación:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + X^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \text{ ----------- [I]}$$

Aplicando la ecuación de Lagrange para la dirección θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = F_\theta$$. Donde según la ecuación [I]: -------- (A)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(mX^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}) = 2mX\dot{X}\dot{\theta} + mX^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} \text{ ----- [II]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \text{ --- [III]}$$

Por consideración de trabajo virtual se deduce: (Ver gráfico)

$$F_\theta(\delta\theta) = mg\,(X\text{Cos.}\theta.\delta\theta) \longrightarrow F_\theta = mgX.\,\text{Cos.}\theta \text{ ------ [IV]}$$

$$F_x(\delta\theta) = mg\,\text{Sen.}\theta(\delta\theta) \longrightarrow F_x = mg.\,\text{Sen.}\theta \text{ ------- [V]}$$

Sustituyendo II, III y IV en la ecuación A y simplificando se obtiene:

$$\left(\frac{I}{m} + X^2\right)\ddot{\theta} + 2X\dot{X}\dot{\theta} = gX\,\text{Cos.}\theta$$ Resp.

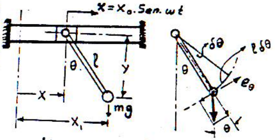
Similarmente para la componente X se deduce:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{X}) = m\ddot{X} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial X} = mX\dot{\theta}^2$$

Luego considerando la ecuación [V] se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial T}{\partial X} = F_x \longrightarrow \ddot{X} - X\dot{\theta}^2 = g.\text{Sen.}\theta$$ Resp.

759.—El sólido P mostrado que soporta al péndulo simple de masa m y longitud ℓ oscila horizontalmente de acuerdo a la función armónica $X = Xo . \operatorname{sen} . \omega t$. Determinar la ecuación del movimiento del péndulo.



Por condición del problema:

$$X = X_0 \text{ Sen. } \omega t \longrightarrow \dot{X} = \omega X_0 \text{ Cos. } \omega t \text{ .... [I]}$$

Cálculo de la velocidad absoluta de m en función de x, y.

$$X_1 = X + \ell \text{ Sen. } \theta$$

$$X_1 = X_0 \text{ Sen. } \omega t + \ell \text{ Sen. } \theta \qquad Y = \ell \text{ Cos. } \theta$$

$$\dot{X}_1 = X_0 \omega \text{ Cos. } \omega t + \ell \dot{\theta} \text{ Cos. } \theta \qquad \dot{Y} = -\ell\dot{\theta} \text{ Sen. } \theta \text{ .... (II)}$$

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{X}^2 + \frac{1}{2} mV_m^2 = \frac{1}{2} M\dot{X}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}^2)$$

Sustituyendo las ecuaciones (I) y (II) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} M(\omega X_0 \text{Cos.} \omega t)^2 + \frac{1}{2} m\left[(\omega X_0 \text{ Cos.} \omega t + \ell\dot{\theta} \text{ Cos.} \theta)^2 + (\ell\dot{\theta} \text{ Sen.} \theta)^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}(M + m)(\omega X_0 \text{Cos.} \omega t)^2 + \frac{1}{2} m(2\omega X_0 \ell\dot{\theta} \text{ Cos.} \theta \text{ Cos.} \omega t + \ell^2\dot{\theta}^2) \cdots \text{(III)}$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada θ será:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = F_\theta \qquad \text{donde según (III) :}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m\omega X_0 \ell \text{ Cos.}\theta.\text{Cos.}\omega t + m\ell^2\dot{\theta}) = -mX_0\omega^2\ell. \text{ Cos.}\theta \text{ Sen.}\omega t - m\omega X_0\ell\dot{\theta} \text{ Sen.}\theta \text{ Cos.}\omega t + m\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\omega X_0 \ell\dot{\theta} \text{ Sen.}\theta \text{ Cos.}\omega t \text{ ------------------ [A]}$$

Por consideración de trabajo virtual se deduce:

$$F_\theta(\delta\theta) = -mg(\ell . \text{ Sen.}\theta\delta\theta) \longrightarrow F_\theta = -mg\ell \text{ Sen.}\theta$$

Sustituyendo los valores deducidos y eliminando [A]:

$$-mX_0\omega^2\ell \text{ Cos.}\theta \text{ Sen.}\omega t + m\ell^2\ddot{\theta} - 0 = -mg\ell \text{ Sen.}\theta$$

Finalmente se obtiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \text{ Sen.}\theta = \frac{X_0}{\ell}\omega^2 \text{ Sen. } \omega t.\text{Cos.}\theta \qquad \text{Resp.}$$

MATRICES DE TRANSFORMACION USADAS

[1] MATRIZ: $\{a_{R\theta\phi}\} = [T_\phi][T_\theta]\{a_{xyz}\}$ (Ver problema 92)

Solución: $$\begin{Bmatrix} a_R \\ a_\theta \\ a_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos.}\theta\text{. Cos. }\phi & \text{Sen.}\theta\text{ Cos. }\phi & \text{Sen. }\phi \\ -\text{Sen.}\theta & \text{Cos.}\theta & 0 \\ -\text{Cos.}\theta\text{ Sen. }\phi & -\text{Sen }\theta\text{ Sen. }\phi & \text{Cos. }\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_Y \\ a_z \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: $a_\theta = -a_x \text{ Sen. } \theta + a_Y \text{ Cos. } \theta + a_z (0)$

[2] MATRIZ: $\{V_{XYZ}\} = [T_\theta]^{-1}[T_\phi]^{-1}\{V_{R\theta\phi}\}$ (Ver Prob. 76)

Solución: $$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_Y \\ V_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos. }\theta\text{ Cos. }\phi & -\text{Sen. }\theta & -\text{Cos. }\theta\text{ Sen. }\phi \\ \text{Sen. }\theta\text{ Cos. }\phi & \text{Cos }\theta & -\text{Sen. }\theta\text{ Sen. }\phi \\ \text{Sen }\phi & 0 & \text{Cos. }\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_R \\ V_\theta \\ V_\phi \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: $V_Y = V_R \text{ Sen. } \theta\text{. Cos. } \phi + V_\theta \text{ Cos. } \theta - V_\phi \text{ Sen. } \theta\text{. Sen } \phi$

[3] $\{H_{xyz}\} = [I]\{\Omega_{xyz}\}$ (Ver probl 411)

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{Bmatrix}$$

Donde: H = Momento cinético

Ω = Velocidad angular

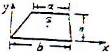
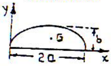
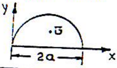
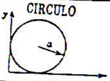
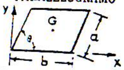
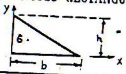
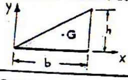
I_{xx} = Momento de Inercia

I_{xy} = Producto de Inercia

NOTA.- Las matrices (1) y (2) se cumplen tanto para velocidades como para aceleraciones.

Astro y símbolo	Diámetro		Aceleración debida a la gravedad en la superficie		Masa (Tierra = 1)
	kms	Millas	cm/seg²	pie/seg²	
Sol ⊙	1 390 600	864 100	27 440	900.3	329 390.00
Mercurio ☿	5 140	3 194	392	12.9	0.0549
Venus ♀	12,620	7 842	882	28.9	0.8073
Tierra ⊕, ⊖, ♁	12 756	7 926	980	32.2	1.0000
Marte ♂	6 860	4 263	392	12.9	0.1065
Júpiter ♃	143 600	89 229	2 646	86.8	314.50
Saturno ♄	120 600	74 937	1 176	38.6	94.07
Urano ⛢, ♅	53 400	33 181	980	32.2	14.40
Neptuno ♆	49 700	30 882	980	32.2	16.72
Luna ☽	3 476	2 159.9	167	5.47	0.01228

Momentos de Inercia y Productos de Inercia de Formas Geométricas

GRAFICO	MOMENTO DE INERCIA	PRODUCTO DE INERCIA	AREA Y CENTROIDE
TRAPECIO 	$I_{x_c} = \frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$ $I_x = \frac{h^3(3a+b)}{12}$		$A = \frac{h}{2}(a+b)$ $y_c = \frac{h}{3}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)$
ELIPSE 	$I_{x_c} = \frac{\pi}{4}ab^3$ $I_x = \frac{5}{4}\pi ab^3$ $I_{y_c} = \frac{\pi}{4}a^3b$ $I_y = \frac{5}{4}\pi a^3b$	$I_{x_cy_c} = 0$ $I_{xy} = Aab = \pi a^2b^2$	$A = \pi ab$ $x_c = a$ $y_c = b$
SEMI-ELIPSE 	$I_{x_c} = \frac{ab^3}{72\pi}(9\pi^2-64)$ $I_x = \frac{\pi}{8}ab^3$ $I_y = \frac{5\pi a^3b}{8}$	$I_{x_cy_c} = 0$ $I_{xy} = \frac{2a^2b^2}{3}$	$A = \frac{\pi ab}{2}$ $x_c = a$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$
SEMI-CIRCULO 	$I_{x_c} = \frac{a^4(9\pi^2-64)}{72\pi}$ $I_x = \frac{\pi a^4}{8}$ $I_{y_c} = \frac{\pi a^4}{8}$ $I_y = \frac{5\pi a^4}{8}$	$I_{x_cy_c} = 0$ $I_{xy} = \frac{2a^4}{3}$	$A = \frac{\pi a^2}{2}$ $x_c = a$ $y_c = \frac{4a}{3\pi}$
CIRCULO 	$I_{x_c} = \frac{1}{4}\pi a^4 = I_{y_c}$ $I_x = I_y = \frac{5}{4}\pi a^4$	$I_{x_cy_c} = 0$ $I_{xy} = Aa^2 = \pi a^4$	$A = \pi a^2$ $x_c = a$ $y_c = a$
PARALELOGRAMO 	$I_{x_c} = \frac{a^3b}{12}\text{Sen.}^3\theta$ $I_{y_c} = \frac{ab}{12}\text{sen}\theta\,(b^2+a^2\cos^2\theta)$ $I_x = \frac{a^3b}{3}\text{Sen.}^3\theta$	$I_{x_cy_c} = \frac{a^3b}{12}\text{sen}^2\theta\cos\theta$	$A = ab\,\text{Sen.}\theta$ $x_c = \frac{1}{2}(b + a\cos\theta)$ $y_c = \frac{1}{2}(a\,\text{sen}\theta)$
RECTANGULO 	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3h}{3}$ $I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y_c} = \frac{b^3h}{12}$	$I_{xy} = \frac{A}{4}bh = \frac{b^2h^2}{4}$ $I_{x_cy_c} = 0$	$A = bh$ $X_c = \frac{1}{2}b$ $Y_c = \frac{1}{2}h$
TRIANGULO 	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y_c} = \frac{bh}{36}(b^2-ab+a^2)$ $I_y = \frac{bh}{12}(b^2+ab+a^2)$	$I_{x_cy_c} = \frac{Ah}{36}(2a-b) = \frac{bh^2}{72}(2a-b)$ $I_{xy} = \frac{Ah}{12}(2a+b) = \frac{bh^2}{24}(2a+b)$	$A = \frac{1}{2}bh$ $x_c = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_c = \frac{1}{3}h$
TRIANGULO RECTANGULO 	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$ $I_{y_c} = \frac{b^3h}{36}$	$I_{x_cy_c} = -\frac{A}{36}hb = -\frac{h^2b^2}{72}$ $I_{xy} = \frac{A}{12}hb = \frac{h^2b^2}{24}$	$A = \frac{1}{2}bh$ $x_c = \frac{1}{3}b$ $y_c = \frac{1}{3}h$
TRIANGULO RECTANGULO 	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h}{4}$ $I_{y_c} = \frac{b^3h}{36}$	$I_{x_cy_c} = \frac{A}{36}hb = \frac{h^2b^2}{72}$ $I_{xy} = \frac{A}{4}hb = \frac{h^2b^2}{8}$	$A = \frac{1}{2}bh$ $x_c = \frac{2}{3}b$ $y_c = \frac{1}{3}h$

NOTA.-Las coordenadas X_c, Y_c, pertenecen al centroide G.

Principales Unidades de Transformación.

	pie/seg	km/h	METRO/SEG	millas/hr	cm/seg	nudo
1 pie por segundo =	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48	0.5925
1 kilómetro por hora =	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78	0.5400
1 METRO por SEGUNDO =	3.281	3.6	1	2.237	100	1.944
1 milla por hora	1.467	1.609	0.4470	1	44.70	0.8689
1 centímetro por segundo =	3.281×10^{-2}	3.6×10^{-2}	0.01	2.237×10^{-2}	1	1.944×10^{-2}
1 nudo =	1.688	1.852	0.5144	1.151	51.44	1

1 revolución $= 2\pi$ radianes $= 360°$

1 gramo por $cm^3 =$ 1.940 slug/pie^3

	cm	METRO	km	Pulg.	Pies	milla
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilómetro =	10^5	1000	1	3.937×10^4	3281	0.6214
1 pulgada =	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla terrestre =	1.609×10^5	1609	1.609	6.336×10^4	5280	1

1 metro cuadrado	= 1.1960	yardas cuadradas
	= 10.764	pies cuadrados
1 centímetro cuadrado	= 0.1550	pulgadas cuadradas
1 metro cúbico	= 35.315	pies cúbicos
1 decímetro cúbico (litro)	= 61.024	pulgadas cúbicas
	= 0.21998	galones imperiales
	= 0.26417	galones Winchester
1 tonelada	= 0.98421	toneladas largas
	= 1.1023	toneladas cortas
1 kilogramo	= 2.2046	libras
	= 35.274	onzas
1 kilogramo por metro	= 2.0159	libras por yarda
	= 0.67197	libras por pie
1 kilogramo por(metro)^2	= 1.8433	libras por yarda cuadrado
	= 0.2048	libras por pie cuadrado
1 kilogramo por centímetro cuadrado	= 14.223	libras por pulgada cuadrada
1 kilogramo por(metro)^3	= 0.06243	libras por pie cúbico
1 gramo por centímetro^3	= 0.57803	onzas por pulgada cúbica
1 kilográmetro	= 7.233	pies libras
1 CV	= 0.98632	HP
1 kW	= 1.3414	HP

1 pulgada cuadrada	= 6.4516	centímetros cuadrados
1 yarda cúbica	= 0.76455	(metros)^3
1 pie cúbico	= 28.317	(decímetros)^3 (litros)
1 pulgada cúbica	= 16.337	(centímetros)^3
1 galón imperial	= 4.5460	litros
1 galón Winchester	= 3.7854	litros
1 tonelada corta	= 0.90718	toneladas
1 tonelada larga	= 1.0160	toneladas
	= 1016.0	kilogramos
1 quintal	= 50.802	kilogramos
1 libra	= 0.45359	kilogramos
1 onza	= 28.350	gramos
1 libra por yarda	= 0.49606	kilogramos por metro
1 libra por pie	= 1.4882	kilogramos por metro
1 libra por yarda^2	= 0.54249	kilogramos por(metro)^2
1 libra por pie^2	= 4.8824	kilogramos por(metro)^2
1 libra por pulgada^2	= 0.070307	kilogramos por cm.^{2}
1 libra por pie^3	= 16.019	kilogramos por(metro)^3
1 onza por pulgada^3	= 1.7300	gramos por (centímetro)^3
1 pie libra	= 0.13826	kilográmetros
1 HP	= 1.0139	CV
	= 0.74548	kW

Momentos de Inercia de Sólidos Geométricos

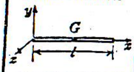
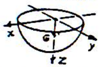
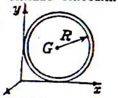
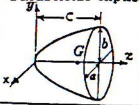
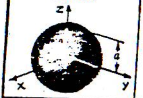
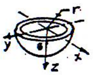
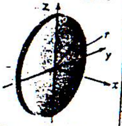
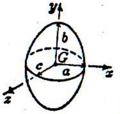
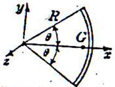
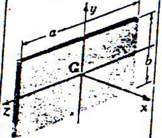
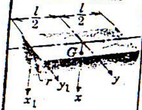
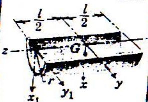
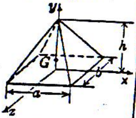
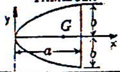
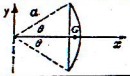
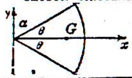
GRAFICO	MOMENTO DE INERCIA	GRAFICO	MOMENTO DE INERCIA
BARRA DELGADA 	$I_x = I_{x_c} = 0$ $I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{M}{12} l^2$ $I_y = I_z = \frac{M}{3} l^2$	SEMI-ESFERA 	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ $= \frac{2}{5} mr^2$
ANILLO CIRCULAR 	$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{M}{2} R^2$ $I_{z_c} = MR^2$ $I_x = I_y = \frac{3}{2} MR^2$ $I_z = 3MR^2$	Paraboloide elíptico 	$I_{xx} = \frac{1}{6} mb^2 + \frac{1}{3} mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6} ma^2 + \frac{1}{3} mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2)$
ESFERA 	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$	CASCARA SEMI-ESFERICA 	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ $= \frac{2}{3} mr^2$
DISCO DELGADO 	$I_z = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_x = \frac{1}{4} mr^2$	ELIPSOIDE 	$I_x = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$
BARRA DELGADA formando arco 	$I_x = I_{x_c} = \frac{MR^2(\theta - \text{sen}\,\theta \cos\theta)}{2\theta}$ $I_y = \frac{MR^2(\theta + \text{sen}\,\theta \cos\theta)}{2\theta}$ $I_z = MR^2$	PLANCHA RECTANGULAR DELGADA 	$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} ma^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
SEMI-CILINDRO 	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{3} ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$	Cáscara semi-Cilíndrica 	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{3} ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
PARALEPIPEDO RECTANGULAR 	$I_{xx} = \frac{1}{12} m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12} m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12} mb^2 + \frac{1}{3} ml^2$	Pirámide recta rectangular 	$I_{x_c} = \frac{1}{80} M(4b^2 + 3h^2)$ $I_{y_c} = I_y = \frac{1}{20} M(a^2 + b^2)$ $I_x = \frac{1}{20} M(b^2 + 2h^2)$ $I_z = \frac{1}{20} M(a^2 + 2h^2)$

GRAFICO	MOMENTO DE INERCIA	PROD-DE INERCIA	AREA Y CENTROIDE
PARABOLA 	$I_{x_c} = I_x = \frac{4}{15} ab^3$ $I_{y_c} = \frac{16}{175} a^3 b$ $I_y = \frac{4}{7} a^3 b$	$I_{x_c y_c} = 0$ $I_{xy} = 0$	$A = \frac{4}{3} ab$ $x_c = \frac{3}{5} a$ $y_c = 0$
SEGMENTO CIRCULAR 	$I_x = \frac{Aa^2}{4}\left[1 - \frac{2\,\text{sen}^3\theta\cos\theta}{3(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta)}\right]$ $I_y = \frac{Aa^2}{4}\left[1 + \frac{2\,\text{sen}^3\theta\cos\theta}{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}\right]$	$I_{x_c y_c} = 0$ $I_{xy} = 0$	$A = a^2(\theta - \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta)$ $x_c = \frac{2a}{3}\left(\frac{\text{sen}^3\theta}{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}\right)$ $y_c = 0$
SECTOR CIRCULAR 	$I_x = \frac{1}{4}a^4(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta)$ $I_y = \frac{1}{4}a^4(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta)$	$I_{x_c y_c} = 0$ $I_{xy} = 0$	$A = a^2\theta$ $x_c = \frac{2a\,\text{sen}\,\theta}{3\,\theta}$ $y_c = 0$

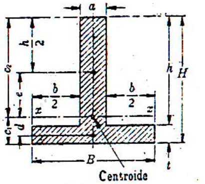
I_x = Momento de inercia en torno al eje x-x.

J = Momento Polar de inercia respecto al eje centroidal.

$Z = I/c$ = Módulo de sección recta en torno al eje x - x.

$Z' = J/c$ = Módulo de la sección polar.

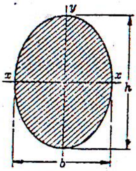
$K^2 = I/A$ = Radio de giro.



$$c_1 = \frac{aH^2 + bt^2}{2(aH + bt)}, \qquad c_2 = H - c_1$$

$$I_x = \frac{Bt^3}{12} + (Bt)d^2 + \frac{ah^3}{12} + (ah)e^2$$

$$\text{Area} = Bt + a(H - t); \quad k = \sqrt{I/A}$$



$$I_x = \frac{\pi bh^3}{64}$$

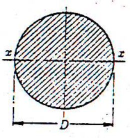
$$Z_x = \frac{\pi bh^2}{32}$$

$$k_x = \frac{h}{4};\ k_y = \frac{b}{4}$$

$$J = \frac{\pi bh}{64}(h^2 + b^2)$$

$$Z' = \frac{\pi b^2 h}{16}\left[\begin{matrix}\text{Por}\\ \text{torsion}\end{matrix}\right]$$

PROPIEDADES DE SECCIONES



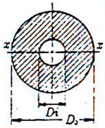
$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$Z_x = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$k_x = \frac{D}{4}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$Z' = \frac{\pi D^3}{16}$$



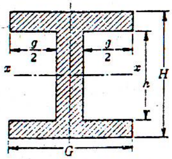
$$I_x = \frac{\pi}{64}(D_o^4 - D_i^4)$$

$$Z_x = \frac{\pi}{32}\left(\frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o}\right)$$

$$k_x = \sqrt{\frac{D_o^2 + D_i^2}{16}}$$

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4)$$

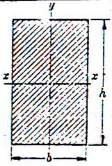
$$Z'_x = \frac{\pi}{16}\left(\frac{D_o^4 - D_i^4}{D_o}\right)$$



$$I_x = \frac{1}{12}(GH^3 - gh^3)$$

$$Z_x = \frac{GH^3 - gh^3}{6H}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{1}{12}\left[\frac{GH^3 - gh^3}{GH - gh}\right]}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$Z_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$k_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$Z' = \frac{2b^2h}{9}\left[\begin{matrix}\text{Por}\\ \text{torsion}\end{matrix}\right]$$